

**Verfahren und Vorrichtung zur Ermittlung von Deformationen****Beschreibung:**

5

Die Erfindung betrifft ein Verfahren zur Ermittlung von Deformationen, wobei diese erfasst werden und wobei untersucht wird, wie eine Zufuhr von Energie, hervorgerufen durch eine Belastung, einen Körper verformt.

10

Die Erfindung betrifft ferner eine für die Durchführung des Verfahrens geeignete Vorrichtung.

15

Es sind verschiedene Verfahren bekannt, mit denen die Deformation eines Körpers unter der Einwirkung von Kräften ermittelt wird.

20

Die bekannten Verfahren sehen vor, den Körper durch ein Gittermodell darzustellen und für jeden einzelnen Gitterpunkt einzeln eine zu erwartende Änderung der relativen Position bei der Einwirkung einer Kraft zu ermitteln.

25

Vor allem für den Fall, dass der Körper eine komplexe Gestalt aufweist, sind die bekannten Verfahren sehr aufwendig. Beispielsweise erfordert die Ermittlung der Deformation eines Fahrzeuges bei einem Verkehrsunfall einen sehr hohen Berechnungsaufwand.

30

Obwohl die in den bekannten Verfahren beinhalteten mathematischen Modelle einfach sind - die zugrunde liegenden mathematischen Modelle beruhen im Wesentlichen auf Arbeiten Eulers aus dem 18. Jahrhundert - sind bisher keine Verfahren bekannt, die sich prinzipiell von den auf Euler beruhenden Verfahren unterscheiden.

35

Der Erfinder hat darüberhinausgehende theoretische Ansätze zur Deformationstheorie entwickelt und in einer Reihe frei zugänglicher Artikel dargestellt.

5

Der erste dieser Artikel „An approach to deformation theory based on Boyle's law. I. The concept, and kinematics of pure shear“ behandelt ein Konzept einer Kinematik von Festkörperdeformation auf Grundlage einer Adaption der idealen Zustandsgleichung  $pV = nRT$ . Durch diese Theorie werden sowohl  
10 isotrope als auch anisotrope Materiale und Beanspruchungen erfasst.

Weiterentwicklungen zu der Kinematik sind in dem Artikel „An  
15 approach to deformation theory based on Boyle's law. II. Kinematics of simple shear, and some energetic considerations“ dargestellt.

Das Erfordernis der Berücksichtigung einer umfassenden  
20 Betrachtung auch geometrisch sehr einfacher Deformationen in grundsätzlich allen 3 Raumdimensionen wurde in dem Artikel dargestellt: „An approach to deformation theory based on Boyle's law. III. Three-dimensional properties of plane-strain deformation: origin of conjugate joint sets, sheath folds in  
25 plastic shear zones, and turbulence in viscous flow“.

Der Erfindung liegt die Aufgabe zugrunde, ein gattungsgemäßes Verfahren so weiter zu entwickeln, dass sich mit ihm Verformungen möglichst schnell und zuverlässig ermitteln  
30 lassen.

Erfindungsgemäß wird diese Aufgabe dadurch gelöst, dass ein jeglicher Punkt Q in einem Festkörper als Referenzpunkt gedacht werden kann, der in einer Norm-Einheitsentfernung in allen  
35 Richtungen von Korrespondenzpunkten P umgeben ist. Diese

Korrespondenzpunkte  $P$  dienen als Richtungsrepräsentanten aus der Sicht von  $Q$  und formen in ihrer Gesamtheit eine Oberfläche von idealiter kugelförmiger Gestalt. Die Ortsänderung aller  $P$  relativ zu  $Q$  als Funktion der wirkenden Kräfte beschreiben die

5 Deformation am Punkt  $Q$ . Im herkömmlichen Verfahren wird ein Punktegitter vordefiniert, und alle Punkte dienen gleichzeitig als Bezugspunkt und Korrespondenzpunkt. Dadurch ist die Genauigkeit des Verfahrens abhängig von der Zahl der Punktepaare, die zwar sehr hoch, aber endlich und

10 notwendigerweise lückenhaft ist. Im Gegensatz dazu kann beim neuen Verfahren jeder Punkt als Bezugspunkt  $Q_1$  dienen, aber damit ist die entsprechende Oberfläche  $A$  aller zugeordneten  $P_1$  für dieses  $Q_1$  festgelegt; dass ein Punkt  $P_1$  für sich als ein Punkt  $Q_2$  fungieren kann, ist aus der Sicht von  $Q_1$  unerheblich.

15 Auf diese Weise gibt es für jedes  $Q$  eine unendlich große Zahl von  $P$ , und innerhalb des Gültigkeitsbereiches des Ansatzes eine unendlich große Zahl von  $Q$ , was eine Darstellung als homogener Differenzialansatz erst möglich macht.

Bisheriges Verfahren	Hier vorgestelltes Verfahren
Das Netz von Knotenpunkten muss erst definiert werden (Abb.01).	Jeder Punkt $Q$ ist von vornherein mit einem Feld von Punkten $P$ vorhanden (Abb.01).
Die Zahl der Knoten im Netz ist zwar beliebig groß, jedoch endlich.	Die Zahl der Punkte $P$ ist unendlich.
Die Zahl der Verbindungslinien zwischen Punktpaaren wächst mit der Zahl der vorhandenen Punkte, ist aber im Prinzip diskret, erfordert daher jeweils eine eigene mathematische Modellierung.	Die Zahl der Verbindungslinien zwischen einem $Q$ und allen zugeordneten $P$ ist unendlich. Ihre mathematische Behandlung kann daher kontinuierlich sein.

Die Strecke zwischen zwei Knoten ist finit.	Die Strecke $Q \rightarrow P$ ist maßstabunabhängig.
Zwei beliebige Knoten im Netz dienen als Anfangs- und Endpunkt einer gegebenen Strecke.	Die Strecke $r_0$ ist die Verbindungsline zwischen $Q$ und $P$ , aber nicht die zwischen zwei $Q$ . Es besteht keine Beziehung zwischen dem Oberflächenpunkt $P_1$ eines $Q_1$ zugeordneten Normvolumens und einem anderen $Q_2$ , (auch dann nicht, wenn $P_1$ gleichzeitig ein $P_2$ sei,) es sei denn, ein $P_1$ falle zufällig auf ein $Q_2$ .
Deformation wird modelliert durch Veränderung dieser Strecke in Länge und/oder Richtung relativ zu dem einen oder dem anderen Knoten, und dann relativ zu einem externen Bezugspunkt.	Deformation wird modelliert mit Hilfe von $r$ relativ nur zu seinem eigenen Bezugspunkt $Q$ , und erst indirekt mit Bezug zu einem externen Bezugspunkt.
Die Deformationsmodellierung bezieht sich auf die $x$ diskreten Verbindungslinien aller Punktpaare.	Die Deformationsmodellierung geschieht homogen-kontinuierlich über alle $P$ relativ zu ihrem $Q$ , und homogen-kontinuierlich über alle $Q$ relativ zu einem externen Bezugspunkt.
Deformation wird als mathematische Transformation ("mapping") von Massepunkten aus den undeformierten in die	Deformation wird als energetische Zustandsänderung begriffen. Zwei verschiedene Punkte $P$ und $Q$ können nicht

deformierten Koordinaten	aufeinanderfallen, weil die
begriffen. Um zu verhindern,	Arbeitsgleichung logarithmisch
dass zwei Massepunkte bei der	ist und dafür unendlich viel
Transformation aufeinander-	Arbeit notwendig wäre. Der
fallen, ist der Apparat der	Apparat der
Kompatibilitätsgleichungen	Kompatibilitätsgleichungen ist
erforderlich.	nicht erforderlich.

### Symbolterminologie

	$T, M, F$	Tensoren	$f, m, r, s, v$	Vektoren
5	$I$	Identitätstensor	$n,$	$t$
		Einheitsvektoren		
	$T_{ij}, F_{ij}$	Tensorkomponenten	$r_i$	
		Vektorkomponenten		
	$P, V, H, U$	Skalare, Zustands-	$f,$	$r$
10		Vektorgrößen		
		Funktionen		
	$P, Q$	Punkte	$\alpha, \gamma, \theta$	Winkel

15

Die Kräfte, die die Oberfläche aller  $P$  verschieben, setzen sich zusammen aus der Summe von externen Kräften  $f_{\text{ext}}$ , den vom System auf die Umgebung ausgeübten Kräften  $m_{\text{syst}}$ , und den Oberflächen-Bindungskräften  $m_A$ , die selbst keine Arbeit leisten (im Sinne einer Zwangskraft), aber Dehnungskomponenten von  $f_{\text{ext}}$ , sowie den Scherkomponenten  $m_{s(\text{syst})}$  und  $f_{s(\text{ext})}$  es ermöglichen, Arbeit leisten zu können:

25

$$f_{\text{ext}} + m_{\text{syst}} + m_A = 0. \quad (\text{Gl.01})$$

Neu ist an dieser Methode bei der Betrachtung von Spannung und Deformation

- die Einführung eines fest definierten Bereiches (das System), das von der Umgebung gedanklich geschieden ist und mit ihr in mechanische Wechselwirkung tritt, und dessen physikalische Eigenschaften maßstabunabhängig (unabhängig von der Größe des Systems) sind,
- die explizite Trennung von Kräften  $f_{\text{ext}}$ , die von aussen kontrolliert von der Umgebung auf das System wirken, und Kräften  $m_{\text{syst}}$ , die das System auf seine Umgebung ausübt,
- die Einbeziehung der Existenz von Bindungskräften  $m_A$  (permanent im Festkörper, nicht-permanent in einer Flüssigkeit), die die Freiheit der Reaktionen des Systems auf äussere Kräfte erheblich einschränken und
- die Erfassung der energetischen Wirkung von Scherkräften (der von Scherkräften geleisteten Arbeit) und der Umwandlung der Scherkomponenten der Felder  $f_{\text{ext}}$  und  $m_{\text{syst}}$  in Normalkomponenten  $f_N(\text{ext})$  und  $m_N(\text{syst})$  parallel zur Hauptdehnungsrichtung.

Die Erfindung sieht somit vor, ein Verfahren zur Ermittlung von Verformungen eines Körpers, wobei untersucht wird, wie die Einwirkung von Kräften den Körper verformt, so durchzuführen, dass für einen Teil des Körpers oder seine Gesamtheit ermittelt wird, wie in Abhängigkeit von Materialeigenschaften, äusseren Grenzbedingungen und Vorhandensein von Bindungskräften zwischen System und Umgebung ein Kräftegleichgewicht zwischen inneren und äusseren Kräften zu Stande kommt. Die Materialeigenschaften müssen als Funktion eines Ortes  $Q$  bekannt sein. Ebenso müssen die externen Grenzbedingungen (Eigenschaften des externen Kraftfeldes) bekannt sein.

Die gesamte von einem äusseren Vektorfeld geleistete Arbeit wird durch Aufteilung der von Normal- und Scherkomponente eines Vektors oder Vektorfeldes geleisteten Arbeit nach der Gleichung

$$5 \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \sqrt{|\mathbf{r} \times \mathbf{f}|^2 + |\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}|^2} = |\mathbf{r}| |\mathbf{f}| = \text{const} \quad (\text{Gl. 18})$$

ermittelt.

Der Radius  $r$  ist ein mechanischer Hebel. Innerhalb eines  
10 Zeitraums, der verglichen mit der materialabhängigen Diffusionsgeschwindigkeit bzw. Relaxationszeit kurz ist, ist das Verfahren auch auf Flüssigkeiten und Gase anwendbar.

Die Gesamtverschiebung wird nach einer logarithmischen  
15 Arbeitsgleichung ermittelt, die aus der dem Material entsprechenden Zustandsgleichung herzuleiten ist; im einfacheren Fall ist die Arbeitsgleichung

$$\int f dr = c \int \frac{dr}{r} = c \ln r, \quad (\text{Gl. 20})$$

20

die sich aus  $PV = nRT$  ableiten lässt.

Nachfolgend wird die Erfindung anhand von zweidimensionalen  
25 Beispielfällen erläutert. Eine Erweiterung auf drei Dimensionen ist jedoch ohne Schwierigkeiten möglich.

Weitere Vorteile, Besonderheiten und zweckmäßige Weiterbildungen der Erfindung ergeben sich aus den  
30 Unteransprüchen und der nachfolgenden Darstellung bevorzugter Ausführungsbeispiele anhand der Zeichnungen:

Von den Zeichnungen zeigen:

Abb.01 Oben: Bisherige Methode (Finite Element-Methode): ein Netz von Knotenpunkten wird vordefiniert und die Deformation am Punkt Q (im Zentrum) durch Änderung von Orientierung und Länge aller Strecken bestimmt, deren eines Ende Q ist. Die jeweils äusseren Punkte sind dann Korrespondenzpunkte P. Die finite Element-Methode heisst so, weil die Strecke zwischen zwei Knoten finit ist. Unten: Jeder beliebige Punkt kann als Referenzpunkt Q angesehen werden, alle Q zugeordneten Korrespondenzpunkte P bilden dann eine geschlossene Fläche um Q, und alle relevanten Variablen - Materialeigenschaften, Grenzbedingungen, Verformung - können als differenzierbare Funktionen des Ortes  $f(Q)$  dargestellt werden.

15

Abb.02 Kompressibilitätsdaten für die Alkali-Elemente. Äussere Belastung in Vielfachen des inneren Drucks. Daten umgerechnet aus Bridgman (1958, p.180).

Abb.03 Beziehung von  $f_{op}$  zu  $f_{dev}$ . Senkrechte Achse: Vektorgröße, horizontale Achse: Winkelabstand. Die linke und rechte Seite repräsentieren eine kontrahierende und eine extendierende Eigenrichtung (c und e) eines anisotropen Feldes. Nur in einem orthogonalen Feld sind die Eigenrichtungen orthogonal und gleichzeitig parallel zu den Hauptachsen eines Ellipsoids. Abb.03 zeigt Beziehung der minimalen und maximalen äusseren Kräfte relativ zum operativen Feld. Schwerkräfte sind nicht berücksichtigt. Umgebungsdruck und operatives Feld sind isotrop-hydrostatisch.

30

Abb.04 (a) Deviatorisches Kraftfeld bei reiner Scherung.  $f_1$  und  $f_2$  sind senkrecht zueinander und parallel zu den Koordinaten und zu den Eigenrichtungen des Feldes. Dieselbe Abbildung repräsentiert das Verschiebungsfeld oder Fließfeld, wenn die Pfeile für Verschiebungen stehen. (b) Orthorhombisches

35



gesamtes Kraftfeld, schematisch.  $\mathbf{m}_i$ : Materialvektor,  $f_{op}$ : hydrostatischer operativer Druck,  $f_i$ : deviatorisches Kraftfeld.

Abb.05 Kraftgrößen entlang eines Einheitskörpers bei reiner Scherung. Durchgehende Linie:  $f_n$ , gestrichelte Linie:  $f_s$ . Ihre Summe ist 1 an allen Punkten.

Abb.06 Dilatanzeffekt einer Scherkraft. Gebogene Linie: Oberfläche des thermodynamischen Systems. Tangentialkraftvektor (gestrichelt) wird Materialpunkt P von P nach P' verschoben; die Entfernung vom Ursprung vergrößert sich. Punktkoordinate  $x_1$  wird von horizontaler Komponente von  $\mathbf{f}$  auf  $x_1'$  gelangt,  $x_2$  wird von vertikaler Komponente von  $\mathbf{f}$  auf  $x_2'$  verkürzt.  $X_i$ : externe Koordinaten parallel zu den Eigenrichtungen.

15

Abb.07 Äussere dicke Linie: Oberfläche eines Einheitskörpers vor der Belastung. Innere dünne Linie: Einheitskörper nach hydrostatischer Belastung aufgrund eines operativen Feldes; Volumenschwund. Innere elliptische Linie: Formänderung des belasteten Körpers nur aufgrund der Normalkomponente des deviatorischen Feldes; Volumenkonstanz. Äussere elliptische Linie: finite Verformung nach Einbeziehung der von Scherkräften geleisteten Arbeit. Fläche zwischen den elliptischen Linien: Volumenzuwachs aufgrund des Dilatanzeffekts.  $X_i$ : äussere Koordinaten parallel zu den Eigenrichtungen.

20  
25

Abb.08 Äusseres Kraftfeld für einfache Scherung mit Einheitskörper. (a) Das Kraftfeld besteht nur aus Kräften parallel zu  $X_1$ . (b) Der Einheitskörper ist im Raum fixiert und kann nicht rotieren. P: Ansatzpunkt eines Vektors, O: Koordinatenursprung,  $\theta$ : Winkel zwischen Positionsvektor von P und  $x_1$ .

30

Abb.09 Kräfte auf der Oberfläche eines Volumenelements in

einem Kontinuum und einem Kraftfeld wie in Abb.08 unterworfen. Durchschnittliche Kraft  $f_{av}$  an ihrem Ansatzpunkt  $P_k$  auf der Oberfläche eines Einheitskörpers bei einfacher Scherung.  $f_{av}$  mit Größe  $\sin \kappa$  zerlegt sich in Normalkomponente  $f_n$  und Scherkomponente  $f_s$ . Letztere ist ausgeglichen durch Oberflächenbindungskräfte.  $f_{s(\kappa)}$  wird von allen Scherkräften an allen Punkten abgezogen, was sinistrale Scherkräfte zwischen  $P_k$  und 0 zur Folge hat.  $\lambda$  ist der Winkel einer Koordinatentransformation, die aufgrund des Ungleichgewichts der Scherkräfte zustande kommt. Die Gleichgewichtsbedingung  $\int f \times r \, d\theta = 0$  ist eingehalten.

Abb.10 Thermodynamisches System bzw. Volumenelement mit Einheitsmasse und elliptischer Form, die im Gleichgewicht mit einem monoklinen externen Kraftfeld ist. Spitzer Winkel zwischen Eigenrichtungen  $c$  und  $e$ .

Abb.11 Vektorgrößen bei einfacher Scherung. (a) im untransformierten Zustand, (b) im transformierten Zustand. Durchgehende Linie: Normalkomponente  $f_{n(dev)}$  (Gl.44, langgestrichelte Linie:  $|f_{dev} \times r_{e11}|$  (Gl.42), Punktstrichlinie:  $f_s$  (Gl.45, siehe Text).  $\perp R$ ,  $\perp P$  : Orientierungen senkrecht zu R- und P-Fläche, vgl. Abb.12.

Abb.12 Geometrie der einfachen Scherung. (a) Berechnete geometrische Eigenschaften:  $x_i$ ,  $X_i$ : Koordinaten,  $c$ : kontrahierende Eigenrichtung,  $e$ : extendierende Eigenrichtung,  $\perp R$ : Richtung vom Ursprung zum R-Punkt und senkrecht zur R(iedel)-Fläche;  $\perp P$ : Richtung vom Ursprung zum P-Punkt, senkrecht zur P-Fläche. (b) Beobachtete geometrische Eigenschaften (Weber & Juckenack 1990). Der einzige größere Unterschied zwischen (a) und (b) ist die Orientierung der Kornformfoliation. Es wird jedoch angenommen, dass die

extendierende Eigenrichtung mit der Gefüge-Orientierung korreliert werden muss, die im allgemeinen etwas tiefer liegt.

Abb.13 (a) Verschiebungsfeld für einfache Scherung. Obwohl das  
5 externe Kraftfeld keine Komponente parallel zu  $x_2$  hat, ist eine  
solche Komponente im effektiven Feld  $f_{dev}$  und dem  
Verschiebungsfeld vorhanden. Eigenrichtungen und Koordinaten  
siehe oben. (b) Natürliches SC-Gefüge: Mylonit in unterer  
10 Grünschieferfazies von der Insubrischen Linie, Sesia-Zone, Val  
Strona, Italien. Lange Dimension des Photos ist parallel zur  
Gesamtfoliation, die als externes Bezugssystem dient. Die mäßig  
nach rechts fallenden Scherflächen sind die C-Flächen. Der  
schwach nach links fallende stoffliche Lagenbau ist die S-  
Fläche. Erhebliche sinistrale Gesamtkörper-Rotation zwischen C-  
15 Flächen-Diskontinuitäten, die selbst dextralen Schersinn haben.  
Gesamter Schersinn ist dextral. (c) Viskose einfache Scherung  
in subvulkanischen Obsidianfluss, Lipari, Italien. Obere Lage war  
weicher, besteht aus schwarzem Glas mit Blasen und zeigt  
Schleppung. Untere Lage war steif, besteht aus teilweise  
20 kristallisiertem Material und reagierte bruchhaft. Schleppung  
in oberer Lage und Kluftorientierung in unterer Lage zeigen  
dextrale Scherung an.

Abb.14. Oben: rechteckiger Festkörper zwischen zwei  
25 Stempeln mit den Orten, für die die Grenzbedingungen unten  
dargestellt sind. Mitte: Grenzbedingungen als Funktion des  
Ortes im Körper. Kreise stehen für (von innen nach aussen):  
operatives Feld (isotrop); Normalkomponente des deviatorischen  
Feldes; vom System beigesteuerter Scher-Dehnungseffekt;  
30 Volumeneffekt aufgrund der externen Grenzbedingungen. Letzteres  
ist in (1) wegen des Reibungseffekts am Werkstück-Stempel-  
Kontakt einwärts gerichtet, in (2) wegen des von der Umgebung  
beigesteuerten Scher-Dehnungseffekts auswärts gerichtet, und  
Null in (3) für Punkte auf der Grenzfläche zwischen Festkörper  
35 und freiem Raum. Unten: Darstellung des erwarteten Effekts;

weisse Kreise: unbelasteter Zustand, schwarze Ellipsen: belasteter Zustand.

Abb.15. Dimensionen 10x2 Entfernungseinheiten. Wellige  
5 Struktur entlang der horizontalen Ränder im unteren Bild sind  
mathematische Artefakte aufgrund Summierung über nicht  
unendliche Koeffizienten  $n$ .

Abb.16. Dimensionen 10x5 Entfernungseinheiten. Wellige  
10 Struktur entlang der horizontalen Ränder im unteren Bild sind  
mathematische Artefakte aufgrund Summierung über nicht  
unendliche Koeffizienten  $n$ .

Abb.17 Dimensionen 10x10 Entfernungseinheiten.

15

Abb.18 Dimensionen 10x30 Entfernungseinheiten.

20

Modellrechnungen sind hier aus Gründen der Vereinfachung auf  
zweidimensionale Beispiele beschränkt. In der vorliegenden  
Anmeldung sind die Gleichungen in der Regel in Vektornotation  
25 und in algebraischer Form gegeben, z.B.

$$\int f \times r \, d\theta = \int \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

Die Erfindung umfasst insbesondere folgende vier Teile:

30

- der Definition eines maßstabunabhängigen Einheitsvolumens mit einer den Gleichgewichtsbedingungen entsprechenden Form,
- der Definition zweier Kraftfelder, die miteinander im Gleichgewicht stehen,

- der Aufstellung einer materialunabhängigen Zustandsgleichung für Festkörper,
- der Umformung der Zustandsgleichung von Skalar- in Vektorform.

5

### Definition des Systems

10 Zweck des Systems ist die Bereitstellung eines Referenzkörpers im unbelasteten Zustand, der die Material- und andere mechanische Eigenschaften repräsentiert. Auf dieses System wird bei Belastung Arbeit geleistet, die maßstabunabhängig ist in dem Sinn, dass zum Beispiel auf ein kleines und ein großes System bei gleicher Verformung relativ zu seiner Masse gleich  
15 viel Arbeit geleistet wird. Damit wird gewährleistet, dass man zwar mit einem finiten Volumen oder einem Radius rechnen kann, die tatsächliche Größe des Systems jedoch nicht relevant ist.

20 Jegliche Masse ist mit einem Potential assoziiert. Im hier betrachteten Fall wird die innere Energie eines thermodynamischen Systems als sein Potential betrachtet. Sie ist in einem gegebenen energetischen Zustand proportional zur Masse,  $dU \propto dn$ , wobei  $n$  die Zahl der Mole ist (die thermodynamische Masse ist dimensionslos). Die Energiedichte pro Masse ist dann  $dU/dV = P$ , in integrierter Form  $U/V = P$ ,  
25 wobei die Masse proportional sowohl zu  $U$  als auch zu  $V$  ist.  $U/V = P$  ist die Energiedichte, oder das thermodynamische Potential pro Einheitsmasse. Letztere ist dann finit.

30 Im Standardzustand  $U_0$  gilt  $PV = nRT$ . Eine infinitesimale Zustandsänderung erfordert die zusätzliche Energie  $dU$ . Dieses  $dU$  ist bei konstantem  $n$  von Natur her etwas ganz anderes als  $dU \propto dn$  oben. Somit ist ein System von finiter Masse und finitem Volumen, assoziiert mit seinem Eigenpotential, eine

Voraussetzung, um infinitesimale Zustandsänderungen zu betrachten.

- Um auf einen Punkt  $P_0$  wirkende Arbeit definieren zu können, muss ein Referenzpunkt  $Q \neq P_0$  gewählt werden. Die Wahl ist beliebig und kann sich aus der Natur des Problems ergeben (Kellogg 1929, p.53, 63; Boas 1983). Die Basisentfernung  $Q \rightarrow P_0$  ist die Nullpotentialentfernung  $r$  und wird hier interpretiert als der Radius des thermodynamischen Systems, im anisotropen Fall: als die Entfernung eines jeden Punktes auf der Oberfläche des thermodynamischen Systems zu dessen Massezentrum. Da die Masse gleichmäßig in der vom thermodynamischen System eingenommenen Region verteilt ist, stellt sie eine verteilte Quelle im Sinn der Potentialtheorie dar (Kellogg 1929, p.156).
- Die Potentiale von verteilten Quellen sind allgemein logarithmisch. Die Nullpotentialentfernung kann dann jeden finiten Wert (ausser Null) haben, wird aber per Konvention oft auf 1 gesetzt.
- In der Thermodynamik werden die Eigenschaften der Materialien in einem Standardzustand ( $P^*$ ,  $V^*$ ,  $T^*$ ) als gegeben, der dann auch als Nullpotentialzustand angenommen werden kann. Eine Druckänderung auf absolut 0 oder  $\infty$  erfordert dann unendlich viel Arbeit. Der Entfernungsterm  $r$  wird hier interpretiert als der Radius  $r_0$  des thermodynamischen Systems im Standardzustand. Er ist das eindimensionale Äquivalent des Volumens der Masse  $n$  in der Zustandsgleichung  $PV = nRT$ . Für Festkörper, die im Vakuum ein finites Molvolumen und eine Dichte  $> 0$  haben, ist der Nullpotentialzustand dann definiert als  $P^* = P_{int}$ . Eine Veränderung der Größe von  $r_0$  erfordert dann eine Zustandsänderung. In erster Näherung wird  $r_0$  zunächst als invariant mit Bezug zur Richtung angesehen, d.h. es wird angenommen, dass das thermodynamische System Kugelform und die Oberfläche pro Volumen einen Minimalwert hat. Die

Berücksichtigung weiterer Grenzbedingungen wie z.B. Materialanisotropie kann dazu führen, dass eine andere Form gewählt werden muss.

- 5 Im isotropen Fall brauchen nur Normalkräfte betrachtet werden, so dass der Divergenzsatz

$$\oint \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA = \int \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \kappa \quad (\text{Gl.02})$$

- die Situation vollständig beschreibt.  $\mathbf{n}$  ist der Einheitsvektor senkrecht zu  $A$ . Kraft wird als Energiefluss  $\mathbf{f} = \mathbf{e}_i \partial U / \partial x_i$  interpretiert.  $A$  ist eine geschlossene Fläche, die das Volumenelement  $dV$  enthält; die Kräfte werden von der Masse im System auf die Umgebung ausgeübt, als auch umgekehrt, d.h. es sind zwei Kraftfelder, die miteinander in Wechselwirkung treten und jedes für sich Gl.02 erfüllen (wobei  $\kappa$  jeweils entgegengesetztes Vorzeichen hat). Unter gleichen äusseren Bedingungen muss eine kleine und eine große Masse relativ zur betrachteten Masse gleiche Arbeit auf ihre Umgebung leisten, die Betrachtung muss also maßstabunabhängig sein. Das thermodynamische System stellt daher eine Quelle von Kräften dar. Die Divergenz des vom System ausgeübten Kraftfeldes (und daher auch die Divergenz des von aussen auf das System ausgeübten Feldes) ist proportional zur Masse, also ist die RHS eine lineare Funktion von  $V$ ; daher ist  $\text{div } \mathbf{f}$  eine Konstante. Daraus folgt: bei gegebenen externen Bedingungen ist  $\text{div } \mathbf{f}$  maßstabunabhängig. Wenn der betrachtete Maßstab, also  $V$ , verändert wird, kann, da die Relation von  $V \propto r^3$  zu  $A \propto r^2$  nicht linear ist, das Verhältnis von  $A$  zu  $|\mathbf{f}|$  nicht konstant sein;  $|\mathbf{f}|$  muss notwendigerweise eine lineare Funktion des Maßstabs sein,  $|\mathbf{f}| \propto r$ .  $\text{div } \mathbf{f}$  ist die Spur des unten definierten Tensors  $\mathbf{F}$ . Sowohl aus Gl.02 und Gl.06 folgt

$$\frac{|\mathbf{f}|}{r} = \text{div } \mathbf{f} = \text{const} \quad (\text{Gl.03})$$

unter konstanten externen Bedingungen, wobei  $r$  der Radius des

Systems und  $r$  ein Mass für den betrachteten Maßstab ist.

Diese Schlussfolgerungen werden nicht verändert durch weitere Entwicklungen des Divergenzkonzeptes, die erst weiter unten erklärt werden können, wenn der Kontext deutlicher ist. Gl.03 ist vereinbar mit den Eigenschaften eines thermodynamischen Kontinuums, mit den räumlichen Eigenschaften eines thermodynamischen Systems, das mit seiner Umgebung in Wechselwirkung tritt, und mit der Tatsache, dass das System ein verteiltes Potential darstellt (Kellogg 1929, p.156).

Ein thermodynamisches System wird durch eine gegebene Menge an Masse definiert. Sein Ort im Raum ist durch sein Massezentrum (oder seinen Schwerpunkt) in einem externen Koordinatensystem  $X_i$  gegeben. Die Oberflächenpunkte des Systems werden mit Hilfe eines eingeschriebenen, inneren Koordinatensystems  $x_i$  dargestellt, dessen Ursprung mit dem Massezentrum des gewählten Systems zusammenfällt. Die physikalischen Bedingungen an den Punkten  $P$  in  $x_i$  sind Funktionen von  $Q$  in  $X_i$  im Sinne eines Vektorfeldes,  $T(Q)v = x$ , wobei  $T$  ein Tensor und eine Ortsfunktion von  $Q$  ist;  $v$  ist der Ortsvektor eines in der Nähe liegenden Punktes  $P$  relativ zu  $Q$ , und  $x$  ist ein Vektor am Ort  $P$  als Funktion von  $T$  und  $v$ .

Die Beziehung zwischen einem Oberflächenpunkt  $P$  und einer bestimmten Richtung in  $x_i$  ist eindeutig. Ein anderer Vektor durch  $P$  kann nur ein Teil eines anderen Systems mit seinem eigenen Ursprung und seinen eigenen Koordinaten sein, und es mögen andere Grenzbedingungen gelten, falls die Gradienten in  $X_i$  nicht null sind. Er ist daher zunächst nicht von Interesse.

#### *Ableitung des äusseren und des Materialkraftfeldes*

Eine Definition eines Tensors ist die Ableitung eines



Vektorfeldes nach den Koordinaten, oder die zweite Ableitung eines Skalarfeldes nach den Koordinaten (Malvern 1969, p.57). Energie oder Arbeit sind solche Skalare. Es wird angenommen, dass ein externes Potential  $U_{\text{ext}}$  existiert, und die Material-  
 5 Enthalpie sei  $E$ , dann ist

$$\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial x_i} = f_i \qquad \frac{\partial E}{\partial x_i} = m_i \qquad (\text{Gl.04})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \mathbf{e}_i \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial m_i}{\partial x_j} = \mathbf{e}_i \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_j \qquad (\text{Gl.05})$$

$$\mathbf{e}_i \int_r \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \mathbf{F} \mathbf{p} = \mathbf{f} \qquad \mathbf{e}_i \int_r \frac{\partial m_i}{\partial x_j} dx_j = \mathbf{M} \mathbf{p} = \mathbf{m} \qquad (\text{Gl.06})$$

wobei  $\mathbf{r}$  der Radius bzw. der Ortsvektor eines Punktes auf der  
 10 Oberfläche des Systems,  $\mathbf{f}$  das äussere Kraftfeld,  $\mathbf{m}$  das Materialkraftfeld des Systems (einfach: Materialfeld) sind, und  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{M}$  sind die Eigenschaftstensoren der beiden Vektorfelder  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{m}$ .  $\mathbf{F}$  repräsentiert die äusseren Grenzbedingungen,  $\mathbf{M}$  stellt die Materialeigenschaften dar, die daher auch einer  
 15 Art innerer Grenzbedingung verstanden werden können. Auf das System wirkende Kräfte werden als Energiefluss verstanden, der den inneren Energiezustand verändert, nicht aber als externe Beschleunigung eines Punktes.

20 Da äusserlich unausgeglichene Kräfte keine Deformation bewirken können, werden sie ignoriert. Ausserdem werden Massekräfte ignoriert, die mit der trägen Masse in Wechselwirkung treten, aber nicht mit der thermodynamischen Masse. Die innere Gleichgewichtsbedingung ist dann gegeben durch

$$25 \qquad \mathbf{f} + \mathbf{m} = 0 \qquad (\text{Gl.07})$$

für jeden Punkt  $P$  auf der Oberfläche des Systems, oder, wenn  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{m}$  als Funktionen der Richtung  $\theta$  verstanden werden,

$$\oint \mathbf{f} d\theta = - \oint \mathbf{m} d\theta \qquad (\text{Gl.08})$$

als Summe über die Oberfläche des Systems in 2D.

Das äussere rotationale Gleichgewicht ist *per definitionem* eingehalten, da System und Umgebung fest miteinander verbunden sind; der Ungleichgewichtsfall kann in einem elastischen Medium nicht eintreten, so lange keine Bindungen gebrochen werden. Die  
 5 Bedingung

$$\int \mathbf{f} \times \mathbf{r} d\theta = 0 \quad (\text{Gl.09})$$

ist daher keine Gleichgewichtsbedingung, sondern lediglich die Feststellung der Orthogonalität für den Fall, dass das rotationale Gleichgewicht eingehalten wird ohne zusätzliche  
 10 Hilfe durch Bindungskräfte  $\mathbf{m}_s$ . Die vollständige Bedingung für das rotationale Gleichgewicht ist

$$\int (\mathbf{f} \times \mathbf{r} - \mathbf{m}_s \times \mathbf{r}) d\theta = 0 \quad (\text{Gl.10})$$

wobei  $\mathbf{m}_s \perp \mathbf{r}$ , ihre GröÙe ist invariant,

$$\frac{\partial |\mathbf{m}_s|}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{Gl.11})$$

15 und  $\mathbf{m}_s \times \mathbf{r}$  hat dasselbe Vorzeichen an allen Oberflächenpunkten P. Bindungskräfte sind weder äusserliche Kräfte noch Materialkräfte; sie existieren unabhängig von den Materialeigenschaften. Sie treten nicht in Erscheinung in Wechselwirkung zu einwärts-gerichteten (komprimierenden)  
 20 Normalkomponenten von  $\mathbf{f}$ , sondern nur von auswärtsgerichteten (dilatierenden) Komponenten sowie allgemein mit Scherkräften; ihre Existenz folgt aus der Vorbedingung, dass Gleichgewicht existieren muss, und sie - falls nötig - das Drehmoment von  $\mathbf{f}$  ausgleichen. Das Thema wird später genauer illustriert.

25

Gl.07 und Gl.08 sind wesentlich für das Verfahren, weil sie äussere und Materialkräfte klar unterscheiden, d.h. Materialkräfte als eigenständige Kräfte erkennen. Sie werden vom System auf die Umgebung ausgeübt aufgrund einer  
 30 Zustandsänderung im System aufgrund der Einwirkung äusserer Kräfte. Das System stellt daher ein Potential dar. Gleichgewicht zwischen System und Umgebung bedeutet unter

isotropen Bedingungen, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{m} = 0 ; \quad (\text{Gl.12})$$

Gl.12 besteht daher aus zwei Poisson-Gleichungen.

5 Spannung im Sinne dieses Antrags ist ein Kraftvektorfeld  $\mathbf{f}_{\text{total}}$ , das aus der Wechselwirkung zweier unabhängiger Kraftfelder  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{m}$ , dem äusseren und dem Materialkraftfeld, ihren jeweiligen Grenzbedingungen im Gleichgewichtszustand, plus der Bindungskräfte falls erforderlich besteht (vgl.Gl.01),

$$10 \quad \mathbf{f}_{\text{total}} = f(\mathbf{f}, \mathbf{m}, \mathbf{m}_s) . \quad (\text{Gl.13})$$

*Aufstellung einer materialunabhängigen Zustandsgleichung für Festkörper*

15

Das ideale Gasgesetz  $PV = nRT$ , ignoriert die atomistische Struktur von ~~Material~~ und betrachtet nur makroskopisches Gesamtverhalten. Das Boylesche Gesetz kann als Materialgesetz für ein ideales Gas betrachtet werden, da es ein bestimmtes  
20 Verhalten des Gases aufgrund einer Zustandsänderung vorhersagt. Es bringt die innere Energie eines Systems, seine Masse und sein Volumen miteinander in Beziehung und beschreibt daher den ihm eigenen energetischen Zustand vollständig. Im Prinzip muss eine solche Zustandsgleichung auch für Festkörper existieren.  
25 Es muss daher möglich sein, einen idealen Festkörper zu definieren.

Als allgemeinste Form der Zustandsgleichung für einen Festkörper wird

$$30 \quad P^* V = z \quad (\text{Gl.14})$$

gewählt, wobei

$$k = \frac{\ln V_{\text{mol}}^{\text{solid}}}{\ln V_{\text{mol}}^{\text{ideal gas}}} . \quad (\text{Gl.15})$$

Die Formel besagt, dass alle Festkörper dieselbe

Kompressibilität  $dV/dP$  aufweisen, wenn das molare Volumen berücksichtigt wird.  $z = f(P)$  ist eine Zahl, die für einen gegebenen Zustand charakteristisch ist; die Funktion selbst ist nicht bekannt, wird aber mit Hilfe der Birch-Murnaghan-Gleichung erfolgreich modelliert. Diese wird bei der Modellierung von Materialverhalten unter hohen Drucken angewendet, z.B. der Vorhersage der elastischen Eigenschaften des Erdkerns (Jeanloz & Knittle 1986).

- Es ist bekannt, Alkalimetalle auf 100 kb zu komprimieren. Sie folgen in erster Annäherung alle derselben Funktion, wenn die äusserlich angelegte Belastung in Vielfachen des inneren Drucks des jeweiligen Materials ausgedrückt wird (Abb.02). Es ist daher gerechtfertigt, den inneren Druck allgemein als Standard für Materialverhalten zu benutzen. Gl.14 ist isotrop, daher ist  $k$  richtungsunabhängig, und ausserdem nur wichtig für das Modellieren von echten Festkörpern. Es genügt, wenn  $k = 1$  gesetzt wird; damit ist  $z = \text{const}$ . Somit sind die thermodynamischen Eigenschaften des idealen Festkörpers identisch mit denen eines idealen Gases, und das Boylesche Gesetz ist anwendbar.

#### Umformung der Zustandsgleichung von Skalar- in Vektorform

Das fundamentale Materialgesetz in der Thermodynamik ist das Boyle-Mariottesche Gesetz,

$$PV = \text{const} \quad (\text{Gl.16})$$

Beide Größen links können neu interpretiert werden, ohne dass die Einheiten selbst sich ändern (es bleibt das Joule); das Ergebnis ist eine Vektor-Form des Boyleschen Gesetzes,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \text{const} \quad (\text{Gl.17})$$

wobei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor eines Punktes P auf der Oberfläche des Systems relativ zu seinem Massezentrum ist. Das Sternprodukt

wird interpretiert als

$$\mathbf{r} \star \mathbf{f} = \sqrt{|\mathbf{r} \times \mathbf{f}|^2 + |\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}|^2} = |\mathbf{r}| |\mathbf{f}| = \text{const} ; \quad (\text{Gl.18})$$

$\mathbf{r} \star \mathbf{f}$  beschreibt die Arbeit, die von der Normal- als auch der Scherkomponente einer externen Kraft  $\mathbf{f}$  am Punkt P geleistet wird, der den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  hat und Teil der Oberfläche eines thermodynamischen Systems ist. Gl.18 ist eine bekannte Identität. Wenn  $\mathbf{r}$  ein Einheitsvektor ist, gilt  $\mathbf{r} \star \mathbf{f} = |\mathbf{f}|$ ; aber das Verhältnis von  $|\mathbf{r}|$  zu  $|\mathbf{f}|$  hat nun die Freiheit, als Funktion der Richtung variabel zu sein, auch wenn Gl.18 eingehalten wird, wenn nämlich  $|\mathbf{f}|$  und  $|\mathbf{r}|$  sich zueinander umgekehrt reziprok verhalten.

Das Kraftfeld  $\mathbf{f}_{\text{total}}$ , das sich beim Übergang vom unbelasteten in den belasteten Zustand entwickelt, kann in eine isotrope Komponente, das operative Kraftfeld  $\mathbf{f}_{\text{op}}$ , und die deviatorische Komponente  $\mathbf{f}_{\text{dev}}$  zerlegt werden, wobei  $\mathbf{f}_{\text{op}}$  die Zustandsänderung repräsentiert. Sowohl  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}$  als auch  $|\mathbf{f} \times \mathbf{r}|$  integriert über die Oberfläche des Systems summieren sich auf Null. Durch  $\mathbf{f}_{\text{op}}$  wird ein Referenzzustand definiert, der dazu dient, den Richtungen des deviatorischen Feldes Vorzeichen zuzuordnen (Abb.03)

20

Im Gegensatz zu Gasen und Flüssigkeiten können Festkörper Scherkräfte aushalten, und der energetische Zustand eines Systems wird von Scherkräften und Normalkräften gleichermaßen beeinflusst. Eine Normalkraft wird je nach Vorzeichen eine Dilation oder Kontraktion des Systems verursachen. Das Vorzeichen einer Scherkraft hingegen zeigt nur ihren Drehsinn an, aber es hat keine Aussage über einen Volumeneffekt. Die Wirkung der Scherkräfte auf das Volumen kann jedoch nur dilatierend sein. Beispiel: ein deviatorisches Feld  $\mathbf{f}_{\text{dev}}$  kann weiter aufgeteilt werden in ein nur aus Normalkomponenten  $\mathbf{f}_n$  und ein nur aus Scherkomponenten  $\mathbf{f}_s$  bestehendes Feld. Ein kugelförmiges Volumenelement wird den Scherkräften  $\mathbf{f}_s$  eines Kraftfeldes mit orthogonalen Eigenrichtungen unterworfen; der

30

Ursprung des Koordinatensystems sei am Massezentrum. Auf der Systemoberfläche setzen die  $f_s$  auf den Punkten  $P$  mit Positionsvektor  $r$  an und verschieben sie parallel zur Richtung von  $f_s$ . Sie werden die Positionen  $P'$  mit Positionsvektor  $r'$  haben. Da  $r$  und  $v = P \rightarrow P'$  senkrecht zueinander stehen, ist immer  $|r'| > |r|$ . Daher hat die von einer Scherkraft geleistete Arbeit einen Volumeneffekt, der immer dilatierend ist. Die dilatorische Komponente summiert sich von Null am Ansatzpunkt der kontrahierenden Eigenrichtung in Richtung auf den Ansatzpunkt der extendierenden Eigenrichtung, wo sie ihr Maximum erreicht. Diese Wirkung gilt sowohl für Scherkräfte, die von der Umgebung auf das System ausgeübt werden, als auch umgekehrt für die Kräfte, die vom System auf die Umgebung ausgeübt werden. Der gemeinsame Effekt der Scherkräfte resultiert in zwei zusätzlichen normal-dehnenden Kraftfeld-Komponenten  $f_{s(\text{ext})}$  und  $m_{s(\text{syst})}$  parallel zur extendierenden Eigenrichtung. Im Endergebnis wird außer der Existenz der Scherkräfte eine dilatierende (also normale) Wirkung parallel zur extendierenden Eigenrichtung erzielt, so dass

$$f_{\text{total}} = f_{\text{op}} + f_{\text{dev}} + f_{s(\text{ext})} + m_{s(\text{syst})} \quad (\text{Gl.19})$$

wobei  $f_{\text{ext}} = f_{\text{op}} + f_{\text{dev}}$ ,  $F_{\text{op}} = cI$ , und  $\det F_{\text{dev}} = \pm 1$ . Ein Beispiel wird unten gegeben. Die Tensoren sind Feldeigenschaftstensoren wie in der Definition eines Vektorfeldes  $Tv = x$  in der linearen Algebra.

Wenn das gesamte Kraftfeld  $f_{\text{total}}$  bekannt ist, kann die Arbeit analog zur PdV-Arbeit berechnet werden,

$$\int f dr = c \int \frac{dr}{r} = c \ln r \quad (\text{Gl.20})$$

Diese Gleichung, über die Oberfläche eines thermodynamischen Systems integriert, liefert dasselbe Ergebnis wie die einfache Berechnung der PdV-Arbeit, wenn die Belastung isotrop und komprimierend ist.

Die Beziehung einer Materialdistanz, also  $r_0$ , zu einer kolinearen Kraft ist durch Differentiation von Gl.18 gegeben,

$$r_0 df + f_0 dr = 0 \quad (\text{Gl.21})$$

Wenn Gl.21 durch  $r_0$  dividiert, re-integriert und durch  $f_0$   
5 dividiert wird, folgt

$$\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = -\frac{\Delta f}{f_0} \quad (\text{Gl.22})$$

in vollständiger Analogie zu  $\ln(V_1/V_0) = -\Delta P/P_0$  in der isotropen Thermodynamik. Gl.22 stellt die Gleichung dar, die Ursache und Wirkung miteinander verbindet; mit ihrer Hilfe wird  
10 das Verschiebungsfeld  $\Delta r = s$  aus dem Kraftfeld  $f_{\text{total}}$  ausgerechnet, die somit identische geometrische Eigenschaften haben.

Ein Festkörper hat im Vakuum sein ideales Volumen  $V_0$  mit  
15 Einheitsradius  $r_0$ . Der ~~interne~~ Druck  $P_{\text{int}}$  eines Festkörpers liegt in der Größe von 100 MPa. Analog zum inneren Druck in Vektorform ist die innere oder Materialkraft  $m_0$ , die eine Kraft mit Größe  $>0$ , aber im unbelasteten Zustand innerlich ausgeglichen ist. Zu Modellierungszwecken ist sie im Folgenden  
20 auf Einheitsgröße gesetzt. Die Größe der äusseren effektiven Kraft muss mit Bezug zur Größe der Materialkraft  $m_0$  normiert werden, woraus Gl.07 vollständig lautet:

$$-\Delta m = \Delta f_{\text{ext}} = \frac{|\Delta f_{\text{ext}}|}{|m_0|} \frac{f_{\text{ext}}}{|f_{\text{ext}}|} \quad (\text{Gl.23})$$

wobei der erste Term rechts die Größe von  $f_{\text{ext}}$  in Mehrfachen des  
25 inneren Drucks des Materials, der zweite ein Einheitsvektor mit der Richtung von  $f_{\text{ext}}$  ist. Diese Normierung ist in Gedanken immer angewandt; im Folgenden werden der Einfachheit halber Einheitsgrößen benutzt, und  $\Delta f$  wird als  $f$  bezeichnet.

30 Die Gleichgewichtsbedingung für das rotationale Moment ist abhängig von den Eigenschaften des Kraftfeldes und der Form des

Systems. Das Gleichgewicht ist immer erhalten, weil System und Umgebung fest miteinander verbunden sind. Die Form des Systems wird bestimmt von den Eigenschaften des Kraftfeldes, den Materialeigenschaften und der Bedingung, dass das A/V-  
5 Verhältnis bei gegebener Masse minimiert sein soll.

Wenn die Wirkung einer progressiven Verformung in 2D gezeigt werden soll, wird zumeist ein Kreis durch ein Verschiebungsfeld in eine Ellipse verwandelt. Der Einheitskreis im unverformten  
10 Zustand ist sicher ein adäquates Konzept für die Demonstration; aber die Form des thermodynamischen Systems (oder Volumenelements) muss die Gleichgewichtsbedingungen einhalten. Insbesondere kann das System im undeformierten Zustand eine  
15 elliptische Form unter einem bestimmten Satz von Grenzbedingungen haben, in einem anderen Zustand kann es ein Kreis sein. Die beiden Konzepte - eine kreisförmige Vorzeichnung im undeformierten Zustand gg. die mechanisch aktive Form des Systems - dürfen nicht verwechselt werden.

20 Eine Funktion des Verschiebungsfeldes ist der Strain-Tensor. Wenn die Hauptachsen des Strain-Ellipsoids während einer progressiven Deformation/ nicht rotieren, müssen sie mit den charakteristischen Richtungen des Verschiebungsfelds (und daher auch des Kraftfeldes) zusammenfallen. Es kann daraus  
25 geschlossen werden, dass die *Eigenrichtungen* des Kraftfeldes und daher auch das Verschiebungsfeld orthogonal sind. Aus mathematischer Sicht ist dies jedoch ein sehr spezieller Fall, und keineswegs eine Vorbedingung. Der Strain-Tensor ist daher nicht hilfreich beim Verständnis von Deformation. Es ist daher  
30 notwendig, (a) die Form des Systems aus den Gleichgewichtsbedingungen zu schliessen, und (b) die Eigenrichtungen des Kraftfeldes zu finden. Sie sind definiert als die Richtungen, entlang derer das Spannungsfeld  $f$  keine Scherkomponenten hat.



### Form des Volumenelements

Gl.18 liefert Grenzbedingungen für die Form des Systems. Die  
 5 einfachste Form ist die Kugel - sie ist isotrop, minimiert das  
 A/V-Verhältnis, und für jede Punktquelle am Massezentrum ist  
 ihre Oberfläche eine Äquipotentialfläche. Für isotrope externe  
 Verhältnisse und ein isotropes Material ist die Kugelform für  
 10 das System die natürlichste Wahl, weil keine Scherkräfte  
 existieren. Für andere Verformungstypen schreibt Gl.18 vor,  
 dass Radius und Normalkraft entlang der kontrahierenden  
 Eigenrichtung  $c$  und entlang der extendierenden Eigenrichtung  $e$   
 identische Größe haben. Die Wirbelung des deviatorischen Feldes  
 für reine Scherung (Abb.04)

$$15 \quad \mathbf{F}_{\text{dev}} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 24})$$

ist Null; daher fallen die Eigenrichtungen des resultierenden  
 Feldes mit denen von  $\mathbf{F}_{\text{dev}}$  zusammen. Die Bedingungen  $\text{tr } \mathbf{T} = 0$  und  
 $\det \mathbf{T} = \pm 1$  sind beide Konservierungsbedingungen und müssen  
 gemeinsam eingehalten sein, also  $|F_{11}| = |F_{22}| = 1$ . Da  $\mathbf{F}_{\text{dev}}$   
 20 orthogonal ist, gibt es keine Beschränkungen aus den  
 Gleichgewichtsbedingungen heraus für die Form des Systems, das  
 daher immer noch kugelförmig ist.

Die Größen der Normal- und der Scherkomponenten der  
 25 deviatorischen Kräfte sind in Abb.05 gezeigt. Unter den  
 gegebenen Grenzbedingungen haben alle deviatorischen Kräfte auf  
 der Oberfläche die Komponenten  $\mathbf{f} = [\cos\theta, -\sin\theta]$ ,  $\theta$  ist dabei  
 der Winkel zwischen der Orientierung von  $\mathbf{r}$  und der  $x_1$ -  
 Koordinate. Die externe Gleichgewichtsbedingung für das  
 30 Drehmoment für den gesamten Körper ist dann

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{f} \times \mathbf{r} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = 0, \quad (\text{Gl. 25})$$

und die Oberflächenbindungskräfte  $m_s$  sind nicht aktiviert.

### Kinematik der reinen Scherung

5

$m_0$  ist die Materialkraft, die mit einem Vakuum im Gleichgewicht ist. Für einen Körper mit Einheitsradius in einem orthogonalen deviatorischen Feld sind die Komponenten des Positionsvektors  $r$  eines Oberflächenpunktes  $P$  durch  $[r_1 \ r_2] = [\cos\theta \ \sin\theta]$  gegeben;  
 10 der operative Kraftvektor ist eine Normalkraft mit den Komponenten  $f_{op}$  proportional zu  $[-\cos\theta \ -\sin\theta]$ ; die deviatorische Kraft  $f_{dev}$  ist proportional zu  $[\cos\theta \ -\sin\theta]$ ; und der radius-normale Tangens-Einheitsvektor  $t = [\sin\theta \ -\cos\theta]$ .

15 Auf  $P$  wirkende externe Kräfte sind die isotrope operative Kraft  $f_{op}$  und die deviatorische Komponente  $f_{dev}$ .  $f_{dev}$  besteht nur aus Normalkräften.  $f_{dev}$  kann weiter aufgeteilt werden in eine Normalkomponente  $f_{n(dev)}$  und eine Tangentialkomponente  $f_{s(dev)}$ . Die Summe aller Normalkomponenten ist

20 
$$\Sigma f_n = f_{op} + (r \cdot f_{dev})r = 1 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (Gl.26)$$

Der entsprechende einwärts gerichtete Verschiebungsvektor  $s_n$  parallel zu  $r$  kann durch Gl.22 gefunden werden.

Das Kreuzprodukt

25 
$$|r \times f_{dev}| = |f_{s(dev)}| = 2 \cos\theta \sin\theta \quad (Gl.27)$$

ist gleichwertig mit  $f \cdot t$ . Eine Scherkraft bewirkt, dass  $P$  von der kontrahierenden Eigenrichtung weg- und zur extendierenden Eigenrichtung hingeschoben wird (Abb.06). Die Komponenten von  $f_{s(dev)}$  bei  $P$  rufen im System Materialkräfte gleicher Größe und  
 30 Richtung, aber entgegengesetzter Ausrichtung hervor, so dass das Drehmoment bei  $P$  ausgeglichen ist. Die Wirkung von  $f_s$  ist, dass  $P$  nach  $P'$  verschoben wird (Abb.06); da jedoch  $f_s$  senkrecht zu  $r$  steht, ist die Entfernung  $r'$  vom Ursprung nach  $P'$  stets

länger als die Entfernung vom Ursprung nach P (Abb.06). Also wird eine Scherkraft stets eine lokale Längung proportional zu ihrer eigenen Größe verursachen. Dieser Effekt ist additiv von Punkt zu Punkt. Die beobachtete Dilation bei P' ist daher die  
 5 Summe aller Dilationen von der kontrahierenden Eigenrichtung bis P,

$$\int (f_{\text{dev}} \cdot t) r \, d\theta = 2 \int^{\alpha} \sin\theta \cos\theta \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \, d\theta \quad (\text{Gl.28})$$

wobei  $\alpha$  die Winkelentfernung von der kontrahierenden Eigenrichtung  $c$  bei  $x_2$  bis P ist. Für  $\alpha = \pi/2$  ist  $\int f \cdot t \, d\theta = 1$ . An  
 10 der unteren Integrationsgrenze gibt es natürlicherweise keine dilatorische Wirkung; das Integral erreicht seinen höchsten Wert an der extendierenden Eigenrichtung  $e$ , obwohl an diesem Punkt keine Scherkräfte vorhanden sind.

15 In einem allseits verbundenen Kontinuum zählt das Ergebnis von Gl.28 doppelt. Unter der Annahme, ein Körper sei hydrostatisch belastet, so dass das operative Kraftfeld (das die Zustandsänderung bewirkt) die Größe -1, und das deviatorische Feld die Größe Null hat. Entlang von  $x_1$  und  $x_2$  wird der Radius  
 20 verkürzt. Dann werden die Grenzbedingungen entlang von  $x_1$  gelockert; es wird angenommen, dass die Umgebung immobil ist. Im Versuch, die gespeicherte Energie zu reduzieren, expandiert das Material von selbst parallel zu  $x_1$ , aber nichts geschieht parallel zu  $x_2$ . Die Größe des operativen Feldes reduziert sich  
 25 auf  $-\frac{1}{2}$ , und ein deviatorisches Feld mit der Größe  $\pm \frac{1}{2}$  entsteht. Da die Ausdehnung nicht isotrop ist, übt der Körper Scherkräfte auf seine Umgebung aus; rechts von der kontrahierenden Eigenrichtung wird ein linksdrehendes Kräftepaar an der Zwischenfläche von System und Umgebung oberhalb der  
 30 extendierenden Eigenrichtung (im 1.Quadranten) beobachtet, darunter aber ein rechtsdrehendes (im 2.Quadranten). Also wirkt das System auf seine Umgebung, wobei der energetische Zustand des Systems von -1 auf  $-\frac{1}{2}$  reduziert wird, bis das System seinen energetischen Minimalzustand erreicht hat. Allerdings ist zu

bemerken, dass das Vorzeichen der Scherkräftepaare entgegengesetzt zu dem ist, was man bei einer reinen Scherung im Kontinuum normalerweise erwarten würde. Wenn jedoch die Umgebung zusammen mit dem System verformt wird, wird sie erst mit dem System in  $x_1$  expandieren und dann zusätzliche Scherkräfte auf das System ausüben, was im 1.Quadranten ein rechtsdrehendes Kräftepaar und im 2.Quadranten ein linksdrehendes Kräftepaar bewirkt, was wiederum zu weiterer Ausdehnung in  $x_1$  führt. Diese Scherarbeit ist von der Umgebung geleistet und führt zu einem Anstieg des energetischen Zustands von  $-\frac{1}{2}$  auf  $-1$ . Also ist ein Teil der Ausdehnung vom Schereffekt des Systems, der zweite Teil vom Schereffekt der Umgebung beigesteuert, und beide sind proportional zur Größe des deviatorischen Feldes. Im Endergebnis setzt also eine dilatorische Kraft der doppelten Größe der integrierten äusseren Scherkräfte auf den Oberflächenpunkt unter der extendierenden Eigenrichtung an, der daher vom Massezentrum des Systems weggeschoben wird.

20

#### *Volumeneffekt der deviatorischen Belastung*

Es wird ein numerisches Beispiel ausgehend von Gl.22 gegeben.  $r_0 = 1$ ,  $f_0 = 1$ , und Volumen  $V_0/\pi = 1$ . Nach Aufladung zur operativen Feldstärke  $-1/5$  sind die Größen entlang  $x_2$ :  $\Delta f = f_{op} + f_{n(dev)} = -2/5$ ,  $r_2 = 0,670$ , entlang  $x_1$ :  $f_{op} + f_{n(dev)} = -1/5 + 1/5 = 0$ ,  $r_1 = 1,000$ . Jedoch  $f_{s(int)} + f_{s(ext)} = 2/5$ , daher  $r_1 = 1,492$ . Das Volumen der resultierenden Ellipse ist  $V/\pi = r_1 r_2 = 1$ , d.h. das Volumen ist dasselbe wie im unbelasteten Zustand (Abb.07).

30

#### **Modellrechnung für einfache Scherung**

##### *Die Eigenrichtungen*

Die Position des Massezentrums des Körpers ist in einem externen Koordinatensystem  $X_i$  gegeben. Ein zweites Koordinatennetz  $x_i$  ist mit dem Körper verbunden, so dass seine  
5 Oberflächenpunkte im zweiten System gegeben sind.

Für eine dextrale Scherung hat das deviatorische externe Kraftfeld die Form  $\mathbf{F}_{\text{ext}} \mathbf{r} = \mathbf{f}_{\text{ext}}$ , wobei

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Gl.29})$$

10 (Abb.08a). Dieses Feld tritt mit einem Einheitskörper (dem thermodynamischen System) mit isotropen Materialeigenschaften in Wechselwirkung (Abb.08b). Daher setzen in einem Kontinuum eine unendliche Zahl von Kraftvektoren auf einer unendlichen Zahl von Punkten auf der Systemoberfläche an. Daher muss man  
15 den durchschnittlichen Ansatzpunkt des durchschnittlichen Kraftvektors  $\mathbf{f}_{\text{av}}$  auf dem Körper finden. So, wie sich das Problem in Abb.08 darstellt, ist  $f \propto \sin\theta$ , wobei  $\theta$  der Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und der Koordinate  $x_1$  ist. Der Durchschnitt für einen Quadranten ist dann

20

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} . \quad (\text{Gl.30})$$

Die durchschnittliche Kraft ist ein Vektor der Form  $\mathbf{f}_{\text{av}} = [2/\pi, 0]$ , der Positionsvektor seines Ansatzpunktes  $P_\kappa$  bildet mit  $x_1$  den Winkel  $\kappa = \pm 39,54^\circ$  (Abb.09). Wenn der Körper im Raum  
25 festgehalten wird und einem Kraftfeld wie in Gl.29 ausgesetzt ist, hat die Normalkraft die Form

$$\mathbf{f}_n = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \cos\theta \sin\theta , \quad (\text{Gl.31})$$

während die Scherkraft durch

$$\mathbf{f}_s = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = \sin^2\theta . \quad (\text{Gl.32})$$

gegeben ist. An  $P_k$  ist letztere daher

$$f_{s(k)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 0.405. \quad (Gl.33)$$

Wenn der Körper auf das angesetzte Kraftfeld reagieren darf, ist  $f_{s(k)}$  ausgeglichen: da Kohärenz zwischen System und Umgebung besteht, ist ein äusseres Ungleichgewicht unmöglich. Daher kann das System nicht frei rotieren, sondern es treten die Oberflächenbindungskräfte  $m_s$  in Erscheinung, die das Rotieren verhindern. Daher wird  $|f_{s(k)}|$  von allen  $|f_s|$  an allen Punkten abgezogen, wodurch das Vorzeichen des effektiven  $f_s$  in einigen Gebieten umgekehrt wird. Die effektive Scherkraft-Größe an allen Punkten  $P$  ist daher

$$|f_{s(eff)}|_\theta = f_\theta \cdot t_\theta - |f_{s(k)}|, \quad (Gl.34)$$

so dass die gesamte effektive Kraft an  $P(\theta)$

$$f_{eff} = f_{s(eff)} + f_n. \quad (Gl.35)$$

ist.

Zu Beginn gab es zwei Punkte ohne Kraftkomponente senkrecht zum Radius, an  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$  (Abb.08b). Durch die Subtraktion von  $f_{s(k)}$  entstehen stattdessen zwei neue mit Winkelabstand  $\theta = \pm \kappa$  auf beiden Seiten der  $x_1$ -Koordinate. Da entlang dieser Richtungen nur Normalkomponenten aktiv sind, werden sie als Eigenrichtungen interpretiert (kontrahierend: c, extendierend: e), die nicht mehr orthogonal sind. Sie schließen miteinander die Winkel  $\pi - 2\kappa = 100.92^\circ$  und  $2\kappa = 79.08^\circ$  ein. Jedoch wurden oben in den Gl.31 und Gl.32 die Einheitsvektoren  $n$  und  $t \perp n$  ohne weitere Erläuterung benutzt; implizit wurde damit jedoch eine sphärische Form für das Volumenelement vorausgesetzt, da es zwischen  $n$  und  $r$  keinen Unterschied gibt. Es ist jedoch immer noch nicht möglich, das Drehmoment für einen sphärischen Körper auszugleichen, da  $\int_{2\pi} f_{s(eff)} \times r \, d\theta \neq 0$ . Daher wird angenommen, dass die Annahme eines sphärischen Körpers

inkorrekt ist. Die Winkelbeziehung zwischen den Eigenrichtungen legt nahe, dass sowohl das effektive Kraftfeld  $f_{eff}$  für einfache Scherung als auch die Form des Systems elliptische Eigenschaften haben. Daher ist es notwendig, die Form der Ellipse zu berechnen, die mit  $f_{eff}$  mit den Eigenrichtungen wie oben im Gleichgewicht ist, und die die Bedingungen von Gl.18 erfüllt.

#### 10 Form von Kraftfeld und Volumenelement

Im Beispiel der reinen Scherung (RS) hat der Feldeigenschaftstensor die Eigenschaften  $\text{tr } F_{RS} = 0$  und  $\det F_{RS} = \pm 1$ . Gl.29 auf einfache Scherung (ES) angewandt weicht davon ab. Jedoch ist der Germ in Gl.33 nicht Teil von Gl.29. Daher wird angenommen, dass die Feldmatrix für einfache Scherung nach der Subtraktion der Eigenschaft  $\det F_{ES} = \pm 1$  hat, was anzeigt, dass alle Fläse, die vom deviatorischen Feld repräsentiert werden und ins System eintreten, es auch wieder verlassen. Daher werden das Kraftfeld für die Bedingungen der elastischen einfachen Scherung und die Formeigenschaften des Systems hier modelliert, indem ein orthogonales Feld der Form

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{Gl.36})$$

angenommen wird, das im Gleichgewicht mit einem kugelförmigen System ist. Die Hauptscherrichtungen sollten jedoch mit den Punkten unter den Koordinaten zusammenfallen, weshalb das Feld um  $45^\circ$  sinistral gedreht wird. Sowohl Kraftfeld als auch Radiusfeld werden dann mit Hilfe einer Transformationsmatrix  $T$  umgewandelt, so dass sie elliptische Eigenschaften erhalten, wobei  $p$  die Positionsvektoren der Oberflächenpunkte im nicht-transformierten Zustand sind:

$$T = \begin{bmatrix} \cot \kappa & 0 \\ 0 & \tan \kappa \end{bmatrix}, \quad (\text{Gl.37})$$

$$\mathbf{T}\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{\text{dev}} = \begin{bmatrix} 0 & \cot \kappa \\ \tan \kappa & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T_{11} \\ T_{22} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Gl. 38})$$

$$\mathbf{T}\mathbf{p} = \mathbf{r}_{\text{ell}} = [T_{11} \cos \theta \quad T_{22} \sin \theta], \quad (\text{Gl. 39})$$

und

$$\mathbf{F}_{\text{dev}}\mathbf{p} = \mathbf{f}_{\text{dev}} = [T_{11} \sin \theta \quad T_{22} \cos \theta]. \quad (\text{Gl. 40})$$

5

Die Eigenrichtungen des elliptischen Radiusfeldes  $\mathbf{r}_{\text{ell}}$  sind daher orthogonal und identisch mit den Hauptachsen der resultierenden Ellipse, die Querschnittsfläche  $A/\pi = T_{11}T_{22} = 1$  hat, während die Eigenrichtungen  $\mathbf{v}_e$  und  $\mathbf{v}_c$  des Kraftfeldes wie  
10 gewünscht nicht-orthogonal sind (Abb.10),

$$\mathbf{v}_{e,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm \tan \kappa \end{bmatrix}. \quad (\text{Gl. 41})$$

#### Kinematik der einfachen Scherung

15

Es trifft sich günstig, dass alle die Gleichgewichtsbedingungen betreffenden Gleichungen nur die transformierten Gleichungen des Beispiels der reinen Scherung sind. Das Kreuzprodukt vereinfacht sich zu

$$20 \quad \oint |\mathbf{f}_{\text{dev}} \times \mathbf{r}_{\text{ell}}| d\theta = T_{11}T_{22} \oint (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta = 0, \quad (\text{Gl. 42})$$

d.h. die elliptischen Eigenschaften von Radiusfeld und Kraftfeld kürzen einander raus. Das lineare Moment ist

$$\oint \mathbf{f}_{\text{dev}} \cdot \mathbf{r}_{\text{ell}} d\theta = (T_{11}^2 + T_{22}^2) \oint \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \quad (\text{Gl. 43})$$

$T_{11}^2 + T_{22}^2 > 2$ , ist die maximale Größe des Skalarprodukts entlang  
25 der Eigenrichtungen  $> 0$ . Dies wird als Artefakt der elliptischen Form angesehen, da die Radii entlang der Eigenrichtungen wegen der Transformation durch  $\mathbf{T}$  nicht Einheitslänge haben. Wenn dagegen das Skalarprodukt des inversen Positionsvektors  $\mathbf{r}_{\text{ell}}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}$  durchgeführt wird,

$$30 \quad \oint |\mathbf{f}_{\text{n(dev)}}| d\theta = \oint \mathbf{r}_{\text{ell}}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\text{dev}} d\theta = \oint 2 \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (\text{Gl. 44})$$



ist die Gleichgewichtsbedingung eingehalten. Die elliptischen Eigenschaften von Kraftfeld und Radiusfeld heben einander auf, was den Bezug einer normalen deviatorischen Kraft  $f_{(n)dev}$  pro Einheitsradius zur Folge hat, deren maximale Größe 1 ist. Gl.44 zeigt die normalisierte Beziehung von  $|f_{n(dev)}|$  zu  $|r_{ell}|$ ; diese Normalisierung von  $f_n$  mit Bezug zu  $r$  ist notwendig (vgl. Gl.23).  $f_{op}$  (vgl. Gl.19-Gl.23) ist daher auch ein Einheitsvektor. Gl.42 und Gl.44 zusammen halten Gl.18 ein. Einige Vektorgrößen sind in Abb.11 gezeigt.

10

Wenn  $t \perp n$ , ist  $t$  kein Tangentenvektor für die Ellipse, sondern definiert als ein Einheitsvektor senkrecht zum Radius und unabhängig von der Orientierung der Ellipsenoberfläche.

15 Die Größe der Scherkraftkomponente ist durch

$$|f_{s(dev)}| = f_{dev} \cdot t = T_{11} \sin^2 \theta - T_{22} \cos^2 \theta \quad (Gl.45)$$

gegeben. Wenn Gl.53 für separate Sektoren (z.B. von der kontrahierenden Eigenrichtung in eine von beiden Seiten zur nächsten extendierenden Eigenrichtung, oder von 0 bis  $\kappa$  und von

20  $\kappa$  bis  $\pi/2$ ) integriert wird, zeigt sich, dass es ein Ungleichgewicht zwischen dextralen und sinistralen Scherkräften auf der Systemoberfläche gibt. Jedoch ist Gl.45 keine Gleichgewichtsbedingung, und die Scherkräfte alleine müssen nicht ausgeglichen sein. Da die Kräfte für die Ellipse ausgeglichen sind (Gl.42), bedeutet ein Ungleichgewicht für 25  $f_{s(dev)}$  keine freie Drehung. Das Ungleichgewicht ist daher dahingehend interpretiert, dass das Kraftfeld permanent reorientiert wird durch eine Transformation der inneren Koordinaten  $x_i$  gegen die äusseren  $X_i$  um einen Winkel  $\lambda$ ,

$$30 \quad \sqrt{f_{s(sinistral)} + f_{s(dextral)}} = \tan \lambda; \lambda = 28.83^\circ \quad (Gl.46)$$

wobei die Vektorgrößen unter der Wurzel für die integrierten Summen über benachbarte Sektoren stehen. Die Wurzel wird gezogen, weil alle Winkelterme in Gl.45 Quadrat-Terme sind. Da

die Eigenrichtungen real sind, ist der Winkel  $\lambda$  stabil.

Es ist zweckmäßig, die linke Seite in Gl.46 als Tangens-Term zu interpretieren, weil es keinen Grund gibt, warum der Term auf Werte  $\leq 1$  beschränkt sein soll. Wenn  $LHS \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 90^\circ$ , was die Bedingung für externe Rotation wäre. Im selben Moment sollte die charakteristische Gleichung degenerieren, d.h. nur eine Lösung haben, worauf die Eigenrichtungen imaginär werden.)

Die Erfindung beinhaltet, dass eine Scherkraft einen Punkt P nach P' verschiebt, weg von c und hin zu e. Eine Scherkraft wird immer eine lokale Dehnung proportional zu ihrer Größe bewirken. Dieser Effekt ist additiv von Punkt zu Punkt. Derselbe Effekt gilt für elastische einfache Scherung, ausser dass die Eigenrichtungen nicht mehr orthogonal sind. Das Ergebnis ist jedoch ähnlich zu dem von Gl.28 (die integriert über je einen Quadranten 1 ergab), nur ist die ~~Quadranten~~ Fläche, über die integriert wird, größer als ein ~~Quadrant~~ Kugelsegment. Das Ergebnis pro Quadrant ist daher im Vergleich zur Kugel (um den Faktor)  $T_{11}T_{22}/2 = 1,018$ . Wie im Beispiel der reinen Scherung erklärt (nach Gl.28), zählt dieses Ergebnis doppelt, also  $w_s = 2,036$ .

$w_s$  ist der dilatierende Effekt der Scherkräfte auf den Radius -  $r_e$  parallel zu e. Der Kürzungsfaktor für den Radius  $r_c$  entlang von c wird durch Gl.22 gegeben. Wenn  $v_c$  und  $v_e$  normalisierte Eigenvektoren sind, können sie als die Radien eines Einheitskreises aufgefasst werden, der dem monoklinen Feld  $\mathbf{Fr} = \mathbf{f}$  ausgesetzt ist, und das Verschiebungsfeld kann ausgerechnet werden. Ein numerisches Beispiel unter Verwendung von Gl.22:  $r_0 = 1$ ,  $f_0 = 1$ , und das Volumen  $V_0/\pi = 1$ . Nach Belastung auf die operative Feldstärke  $-1/5$  sind die Größen entlang von c  $\Delta f = f_{op} + f_{n(dev)} = -2/5$ ,  $r_c = |v_c| = 0.670$ . Entlang von e sind sie  $f_{op} + f_{n(dev)} = -1/5 + 1/5 = 0$ ,  $r_e = 1.000$ ; aber

$w_s = 2.036/5 = 0.407$ , daher  $r_e = |v_e| = 1.503$ . Wenn  $S$  der Verschiebungsfeld-Eigenschaftstensor ist,

$$|v_e||v_e| = \det S = 1.0155 \quad (\text{Gl. 47})$$

was besagt, dass in diesem Beispiel das Volumen eine reale  
5 Expansion von 0,75% erfährt.

### *Geometrische Eigenschaften einer Deformation nach einfacher Scherung*

10

Die Koordinaten  $x_i$  werden gegenüber  $X_i$  um 1 in der Scherrichtung rotiert. Im äusseren Rahmen  $X_i$  ergibt sich folgendes Bild (Abb.12): die extendierende Eigenrichtung  $e$  liegt bei  $10,71^\circ$ , die kontrahierende Eigenrichtung  $c$  bei  
15  $111,63^\circ$ . Die Winkelhalbierenden der von  $c$  und  $e$  eingeschlossenen Winkel sind parallel zu den  $x_i$ -Koordinaten und markieren die Richtungen der einfacher Scherung. Der Orientierungsvektor, der den größeren Sektor bei  $61,18^\circ$  halbiert, markiert eine Scherrichtung senkrecht zu sich selbst,  
20 die R-Fläche liegt daher bei  $-28,83^\circ$ ; der Orientierungsvektor, der den kleinen Sektor bei  $28,83^\circ$  teilt, markiert die P-Scherfläche bei  $61,18^\circ$  (Abb.12).

Ein wichtiger Bestandteil der Erfindung ist die Ermittlung des  
25 Kraftfeldes, das die Deformation verursacht, und des Verschiebungsfeldes. Jedoch muss das Verschiebungsfeld unabhängig von der Deformationsart - elastisch oder plastisch - die Eigenschaften des Kraftfeldes widerspiegeln, selbst wenn die dabei entstehenden Phänomene sich ganz erheblich in ihrer  
30 Natur unterscheiden. Daher ist es gerechtfertigt, die Eigenschaften des berechneten Kraftfeldes mit Gefügeeigenschaften zu vergleichen, die in plastisch verformten Gesteinen zu beobachten sind.  $X_1$  ist die Scherzonengrenze (Abb.12a). Von den Eigenrichtungen wird  $e$  mit der S-Fläche in

SC-Gefüge korreliert (Berthé et al. 1979) und mit der Richtung, parallel zu der die Hauptanisotropie der Kristalle sich ausrichtet. Der vorausgesagte Winkel von ca.  $11^\circ$  ist in guter Übereinstimmung mit der Schiefe von Gefügediagrammen für  
5 monomineralische Scherzonen mit Mineralen mit nur einer gut ausgebildeten Scherrichtung (Eis, Glimmer, Olivin).

Die kontrahierende Eigenrichtung  $c$  ist in Hochtemperatur-Tektoniten nicht gut entwickelt. Die Richtung kann durch Fehlen  
10 von Druckschatten oder durch minimale Glimmer-Ausrichtung entlang der Oberfläche von Feldspat-Porphyroklasten erkannt werden. Wenn die Mylonite jedoch herausgehoben werden, entwickeln sie häufige Klüfte, die den Lagenbau mit ca.  $70-80^\circ$  gegen die Scherrichtung geneigt schneiden. Sie sind offenbar  
15 von der elastischen Energie verursacht, die während der plastischen Verformung im Gestein gespeichert wurde, und die freigesetzt wird, wenn der Umschließungsdruck nicht mehr ausreicht, das Gestein zusammenzuhalten. Das hier vorgestellte Verfahren erlaubt den Schluss, dass Risse sich parallel zu  $c$   
20 öffnen.

Die Scherfläche bei  $\theta = -28,83^\circ$  ist die Riedelsche Fläche  $R$  (Riedel 1929) oder die  $C$ -Fläche in SC-Gefüge (Berthé et al. 1979). Die  $P$ -Fläche ist bei natürlicher plastischer Verformung  
25 meistens unterdrückt, wurde aber in Experimenten beobachtet (z.B. Merzer & Freund 1975), bildet auch manchmal eine schlecht ausgebildete Scherrichtung (Abb.12b). Sie tritt stärker in Erscheinung, wenn das Materialverhalten nahe der plastisch-bruchhaften Grenze lag. Die  $R$ -Fläche (synthetisch, hier  
30 dextral) und die  $P$ -Fläche (antithetisch, hier sinistral) sind nicht mechanisch gleichwertig. Die  $R$ -Fläche ist wohl die erste, die zu fließen anfängt, wenn plastisches Verhalten einsetzt. Abb.13 zeigt das Fließfeld. Der Schersinn auf der  $R$ -Fläche ist synthetisch zur Gesamtscherrichtung, aber die Fläche selbst  
35 rotiert gleichzeitig antithetisch nach  $e$ ; bei diesem Vorgang

wird sie progressiv gestreckt, bis sie zerfällt. R- und P-Flächen sind Dehnungsgleitflächen (stretch faults).

## 5 Energetik der Deformation bei elastischer und plastischer, reiner und einfacher Scherung

### Elastische Verformung

- 10 Der Zustand, in dem das System sich befindet, wird vom operativen Kraftfeld bestimmt, das als Maß für die Feldstärke dient. Es kann genutzt werden, die Deformationstypen miteinander zu vergleichen. Im elastischen Bereich sind  
 15 operatives und deviatorisches Feld während der progressiven Belastung proportional zueinander; sie benötigen daher beide Arbeit, die das elastische Potential repräsentiert. Da die Summe von  $f_{n(dev)}$  von 0 nach  $\pi$  Null ist, ist die von Normalkräften geleistete Arbeit nur die von  $f_{op}$ ,

$$\int_0^{\pi} f_{op} d\theta = -2\pi \quad (Gl.48)$$

- 20 für  $r_0 = f_0 = \Delta f_{op} = 1$  (vgl. Gl.22). Im isotropen Fall wäre dies der einzige Term, der in 2D zu berücksichtigen wäre; in absoluten Zahlen ist dies von allen Möglichkeiten der Fall der größten Arbeit. Diese Arbeit äussert sich in isotroper Kontraktion. Von Scherkräften geleistete Arbeit verursacht eine  
 25 gerichtete Dilation. Gl.28 integriert von 0 nach  $\pi/2$  für einen Quadranten, mal 4 für alle Quadranten, ergibt 8,000; die Gesamtarbeit für elastische reine Scherung beträgt daher  $w_{PS(el)} = 8 - 2\pi = 1,717$ .

- 30 In elastischer einfacher Scherung ist die Größe von  $f_{op}$  dieselbe wie oben. Die Scherarbeit (Gl.47) muss für einen Sektor von  $c$  nach  $e$  integriert und mit 4 multipliziert werden, um die Summe über alle Sektoren zu erhalten. Die Gesamtarbeit bei elastischer einfacher Scherung ist daher  $w_{SS(el)} = -2\pi +$

8,144 = 1,861. Bei gleicher operativer Feldstärke erfordert elastische einfache Scherung daher 8,4% mehr Energie als reine Scherung.

5

### *Plastische Verformung*

Der Mechanismus, durch den eine plastische Verformung bewirkt wird, ist nicht Gegenstand der Erfindung. Es wird angenommen, dass das Material kontinuierlich bleibt, und dass ein homogener Zustand des Feldes  $f$  fortexistiert. Der Übergang von elastischer zu plastischer Verformung (der Fließpunkt) wird durch einen Wechsel von reversiblen zu irreversiblen Verhalten charakterisiert. Daher erreicht das operative Feld eine stabile Feldstärke und erfordert keine weitere Arbeit.

Die gesamte weitere Arbeit, die plastische Verformungsenergie, wird daher nur durch Scherkräfte geleistet. Da die von ihnen verursachte Dilation ein elastisches Phänomen ist, dessen Aufbau am Fließpunkt aufhört, wird die Energie nicht im Volumen des Systems gespeichert, sondern entlang seiner Oberfläche dissipiert. Da das System sich daher passiv verhält, gilt das Prinzip der doppelten Arbeit (vgl. Diskussion nach Gl.28) nicht mehr; also ist die benötigte Scherenergie nur halb so groß wie für eine elastische Verformung. Dissipierte Energie ist verlorene Energie und muss nicht ausgeglichen sein; da aber eine freie Drehung des gesamten Systems in einem Feld mit realen Eigenrichtungen nicht möglich ist, - die die nach wie vor existieren wegen der fortgesetzten Existenz des elastisch gespannten Zustands - muss das Drehgleichgewicht nach wie vor ausgeglichen sein.

Für einfache Scherung ist das Feld  $f$  orthorhombisch, und sinistrale und dextrale Scherung gleichen einander aus, also ist eine externe Rotation des Systems nicht möglich. Bei der

Betrachtung der Arbeit sind die sinistrale und dextrale Scherarbeit zu summieren, daher ist die bei plastischer reiner Scherung geleistete Arbeit halb so groß wie bei elastischer Belastung, also  $w_{ps(pl)} = 4$ .

5

Bei einfacher Scherung sind die Verhältnisse etwas komplexer. Gl.45 von c nach e integriert für beide Sektoren ergibt verschiedene Werte: 1,229 dextrale Scherarbeit in den großen Sektoren, und 0,733 sinistrale Arbeit in den kleinen Sektoren.

- 10 Das Ungleichgewicht für das gesamte System beträgt 1,202; die gesamte auf das System geleistete Scherarbeit beträgt 4,144. Da die großen Sektoren das Übergewicht haben, löst das Ungleichgewicht einen plastischen dextralen Gesamtfluss aus. Die Auslösung eines dextralen Ungleichgewichts führt zu einem
- 15 Ungleichgewicht des Drehmoments für das gesamte System. Da die Form des Systems elliptisch ist und die lange Achse des Systems im kleinen Sektor mit sinistraler Scherung ist, ist das Drehmoment des gesamten Systems proportional zur Größe, aber umgekehrt zum Drehsinn der plastischen Scherung, also
- 20 sinistral. Die dextrale plastische Scherung kostet Energie, die dissipiert wird, d.h. es ist eine innere dextrale Scherung. Die Rotation des Systems aufgrund des Drehmoments ist eine äussere sinistrale Scherung, die keine Energie kostet. Da innere und äussere Rotation einander ausgleichen, sind die Eigenrichtungen
- 25 immer noch real. Daher ist also die dissipierte Energie bei einer plastischen dextralen einfachen Scherung durch eine externe sinistrale Rotation minimiert, und die so gesparte Energie ist proportional zum Ungleichgewicht; also ist  $w_{ss-pl} = 4,144 - 1,202 = 2,933$ .

30

Bei gleicher operativer Feldstärke kostet eine plastische einfache Scherung daher 26,7% weniger Energie als reine Scherung. Energetische Unterschiede dieser Größenordnung sind von Experimenten bekannt; sie treten systematisch auf als

35 Funktion des Verschiebungsfeldes und sind materialunabhängig

(Quarz, Salz, Gips; Franssen & Spiers 1990; Franssen, pers. Mitt.).

Das hier vorgestellte Verfahren ist vollständig mit der  
5 Potentialtheorie und thermodynamischen Prinzipien vereinbar.  
Die Erfindung bietet eine einfache, unmittelbare Korrelation  
von Kraftfeld zu Verschiebungsfeld an, die beide Vektorfelder  
sind und von Tensoren kontrolliert werden; aus mathematischer  
Sicht ist das systematischer als das bisherige Verfahren. Das  
10 neue Verfahren macht ausserdem Vorhersagen möglich, die das  
bisherige Verfahren nicht gestattet, weil es z.B. aus einem  
gegebenen Spannungszustand nicht die Ableitung eines bestimmten  
Verschiebungsfeldes erlaubt.

15 Ein viskoser Deformationsschritt für ein Gas oder eine  
Flüssigkeit kann zerlegt werden in einen zeitunabhängigen,  
reversiblen, elastischen Belastungsschritt und einen  
zeitabhängigen, irreversiblen, diffusionskontrollierten  
Relaxationsschritt. Das neue Verfahren ist auch geeignet zur  
20 Modellierung des Verhaltens von viskosen Flüssigkeiten, sofern  
Zeiträume betrachtet werden, die im Vergleich zur Relaxations-  
geschwindigkeit kurz sind.

25 Anwendungsbeispiel für eine elastische Deformation eines  
Werkstücks mit gegebener Form unter gegebenen Grenzbedingungen

Das vorgestellte Verfahren basiert auf Potentialberechnungen.  
Das thermodynamische Kontinuum ist dabei kein Kontinuum von  
30 Punkten, sondern ein Kontinuum von Systemen. Ein beliebiger  
Punkt Q im mit verteilter Masse gefüllten euklidischen Raum  
dient als Sitz eines thermodynamischen Systems; seine  
physikalischen Eigenschaften - Dichte, chemische  
Zusammensetzung, Temperatur, Materialeigenschaften,  
35 Orientierung der Anisotropie - und zusätzlich die der externen



Grenzbedingungen sind dann Ortsfunktionen von  $Q$ . Maßstabunabhängigkeit stellt dann sicher, dass die extensiven Größen pro Einheitsmasse gültig sind. Zwei unendlich nah beieinander liegende Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  repräsentieren zwei  
5 unterschiedliche thermodynamische Systeme  $V_1$  und  $V_2$  mit einer finiten Größe, die zum größten Teil überlappen. Ihre physikalischen Eigenschaften beziehungsweise die Grenzbedingungen können Gradienten im euklidischen Raum unterworfen sein. Die Systeme können so definiert sein, dass  
10 sie Einheitsmasse, Einheitsvolumen oder Einheitsradius haben, die allesamt finit sind. Im Unterschied zum bisherigen Verfahren bietet die hier vorgestellte Erfindung eine seiner inneren Logik folgende finite Strecke - den Radius des thermodynamischen Systems - als Basisstrecke für eine  
15 Wellengleichung an. Die räumlichen Eigenschaften der physikalischen Größen können daher durch einen Ansatz unter Verwendung von Fourierschen Serien als Funktion der Grenzbedingungen modelliert werden.

20 Das gesamte Kraftfeld ist aufgegliedert in das isotrope Kraftfeld  $f_{op}$  und das deviatorische Kraftfeld  $f_{dev}$  (vgl. Teil I, Koenemann 2000). Letzteres kann weiter aufgegliedert werden in die Normalkomponente  $f_{n(dev)}$  und die Scherkomponente  $f_{s(dev)}$ . Normalkräfte werden den ihnen zugeordneten Radiusvektor je nach  
25 Vorzeichen verkürzen oder strecken. Scherkräfte dagegen haben immer dehnende Wirkung, was den Effekt einer zusätzlichen Streckungskomponente parallel zur extendierenden Eigenrichtung  $e$  hat, die parallel zu  $x_1$  ist. Nach Gl.28 (Koenemann 2000) wurde festgestellt, dass die von Scherkräften geleistete Arbeit  
30 doppelt gilt, weil der eine Teil der Streckung in  $x_1$  vom System selbst, der andere jedoch von der Umgebung geleistet wird. Der vom System geleistete Teil ist eine Funktion der Belastungskonfiguration (Belastungsgröße, externe  
Grenzbedingungen, z.B. reine Scherung). Die von der Umgebung  
35 verursachte Scherdilatanz gibt es in einem perfekten Kontinuum

durchaus, aber ihre Größe muss auf Grenzflächen gegen den freien Raum Null erreichen. Wenn alle anderen Komponenten konstant gehalten werden, ist es diese Komponente, die als Funktion des Ortes innerhalb eines Körpers variieren kann und damit eine Funktion der Form des Körpers ist.

Das 2D-Modell besteht aus einem rechteckigen Festkörper. Es wird oben und unten mit einer konstanten Kraft belastet, während die Seitenflächen frei sind. Die Last wirkt vertikal parallel zu  $y$  ( $df_y/dx = 0$ ). Die belasteten Flächen ( $y = 0$ ,  $y = 1$ ) sind wegen der Reibung an den Stempeln in ihrer Freiheit behindert und können sich in  $x$  nicht ausdehnen; an allen anderen  $y$  sind sie frei. Daher ist die Belastung im gesamten Körper dieselbe, es gibt keinen Gradienten, einschließlich der Punkte auf den Seitenflächen. Daher sind die Größen des operativen Feldes  $f_{op}$  und der Normalen-Komponente  $f_n$  in gesamten Körper monoton. Sie werden hier nicht weiter betrachtet.

Die Grenzbedingungen für die dilatierende Scherung  $T$  variieren im Körper auf zweierlei Weise: (a) Die Bedingung, dass die belasteten Flächen sich in  $x$  nicht ausdehnen dürfen, erreicht ihre maximale Wirkung auf den Flächen  $y = 0$  und  $y = 1$ , ist aber gegen die Mitte des Körpers hin zunehmend unwirksam, was eine progressive Ausdehnung in  $x$  gestattet (hier genannt  $T_1$ ); und (b) der Kontinuum-Schereffekt ( $T_2$ ) erreicht ein Minimum - auf den freien Seitenflächen, weil es keine Umgebung mehr gibt; auf den belasteten Flächen oben und unten, weil Ausdehnung durch Bedingung (a) verhindert wird - sie steigt aber gegen die Mitte des Körpers an. Die Richtung der abnehmenden Strenge für die Grenzbedingungen ist gegen die Mitte für  $T_1$  und nach allen Seiten hin für  $T_2$ . Also haben die beiden Grenzbedingungen entgegengesetzte Wirkung und Vorzeichen (Abb.14, Pfeile im vierten Ring für die Bedingungen 1 und 2). Sie müssen daher separat modelliert werden.

Im statisch belasteten Zustand leisten System und Umgebung miteinander Arbeit, die nicht gemessen werden kann, weil in der Thermodynamik nur die mit Zustandsänderungen verbundene Arbeit  
 5 gemessen werden kann. Zeitabhängige Prozesse werden nicht beobachtet, System und Umgebung sind im Gleichgewicht miteinander, und alle Flüsse sind ausgeglichen. Die zur Diskussion stehende Größe  $T = T_1 + T_2$  ist die von Scherkräften geleistete Arbeit, eine skalare Größe, die eine Volumenänderung  
 10 bewirkt, die ebenfalls eine skalare Größe ist. Es ist daher möglich, das Modell mit Hilfe einer Laplace-Gleichung anzugehen.

$T_1$  wird zuerst behandelt. Die Verteilung einer skalaren Größe  
 15  $t_1$  in der Region  $x(0 \rightarrow b)y(0 \rightarrow d)$  mit einem Maximalwert  $t_1 = M$  für alle Punkte  $y = 0$  und  $t_1 = 0$  für alle Punkte  $x = 0$ ,  $x = b$  und  $y = d$  ist

$$t_1 = -4M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi(d-y)}{b}\right) \sin \frac{m\pi x}{b}}{m\pi \sinh \frac{dm\pi}{b}} \quad (\text{Gl. 49})$$

20

(Boas 1983:546, ihre Gleichung 2.17), wobei  $M$  ein die absolute Größe bestimmender Faktor,  $b$  die Weite des Körpers in  $x$ ,  $d$  seine Länge in  $y$ , und  $m = 2n - 1$  ist ( $m$  ist immer ungerade). Der umgekehrte Fall ist der, bei dem  $t_2 = M$  für alle Punkte  $y =$   
 25  $d$ , und  $M = 0$  ist für alle Punkte  $x = 0$ ,  $x = b$ , und  $y = 0$ ,

$$t_2 = -4M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin \frac{m\pi x}{b}}{m\pi \sinh \frac{dm\pi}{b}} \quad (\text{Gl. 50})$$

Der gemeinsame Effekt ist  $T_1 = t_1 + t_2$ . Entlang  $x = b/2$  bildet

$T_1$  eine nach oben gewölbte Kurve mit einem Minimum  $T_1 = -M$  für  $y = 0$  und  $y = d$  und einem Maximum ( $M < 0$ ) für  $y = d/2$ . Entlang  $y = d/2$  bildet  $T_1$  eine nach unten gewölbte Kurve mit einem Maximum  $T_1$  für  $x = 0$  und  $x = b$  und einem Minimum bei  $y = d/2$  (welches der maximale Punkt auf  $x = b/2$  ist).

Für  $T_2$  sind die Grenzbedingungen wie folgt:  $M = 0$  für alle Punkte  $x = 0$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  und  $y = d$ , und der Graph steigt nach innen an. Dies geschieht durch

$$T_2 = b \sin \frac{\pi x}{b} d \sin \frac{\pi y}{d} \quad (\text{Gl. 51})$$

Die Summe  $T = T_1 + T_2$  wird als das Potential für Dehnungsrisse interpretiert (in Abb.15-Abb.18 jeweils oben). Es ist von besonderem Interesse, herauszufinden, wo die Gradienten für Gl.3 am größten sind. Daher

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -4M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \sinh \frac{m\pi(d-y)}{b} + \sinh \frac{m\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{b} \right)}{b \sinh \frac{dm\pi}{b}} \quad (\text{Gl. 52})$$

und

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \pi \cos \frac{\pi x}{b} d \sin \frac{\pi y}{d}; \quad (\text{Gl. 53})$$

die Größe des Gradienten wird durch

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 4M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \sinh \frac{m\pi(d-y)}{b} + \sinh \frac{m\pi y}{b} \right) m\pi \sin \frac{m\pi x}{b}}{b^2 \sinh \frac{dm\pi}{b}} \quad (\text{Gl. 54})$$

und

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2 \sin \frac{\pi x}{b} d \sin \frac{\pi y}{d}}{b} \quad (\text{Gl. 55})$$

gegeben. Die Ableitung  $\partial^2 T / \partial x^2$  (die Summe von Gl.546 und Gl.55) der Oberfläche  $T(b, d)$  wird als das Potential für Scherrisse interpretiert (Abb.15-Abb.18 jeweils unten). Die Ableitung  
5  $\partial^2 T / \partial y^2$  liefert dieselben Ergebnisse in dem Sinn, dass die Morphologien der beiden Ableitungen identisch sind, jedoch sind ihre absoluten Größen von den gewählten absoluten Größen von  $b$  bzw.  $d$  abhängig. Für realistische Ergebnisse muss das Modell mit Hilfe von beobachteten Werten geeicht werden.

10

Der Ansatz liefert alle Eigenschaften der Spannung als Funktion des Ortes innerhalb der Gültigkeitsregion  $bd$ . Auf ähnliche Weise sollte es möglich sein, die Verschiebungen aus der Arbeitsgleichung herzuleiten und die Form des deformierten  
15 Körpers zu berechnen.

### Ergebnisse

20 Abb.15-Abb.18 zeigen die oberen Teile das Potential für Dehnungsrisse  $T$ , die unteren Teile zeigen das Potential für Scherrisse  $\partial^2 T / \partial x^2$ . Die Breite von 10 Entfernungseinheiten ist dieselbe in allen Abbildungen. Die Farben deuten relative Größen an (lila = Minimum, rot = Maximum).

25

Für dicke, kurze Säulen (Abb.15, Höhe 2 Einheiten) ist das Zentrum dynamisch tot, da es unter starker Kompression steht. Das Dilationspotential ist ausschließlich entlang der freien Oberflächen zu finden, was nahe legt, dass ein bis an die  
30 elastische Grenze belastetes sprödes Material oberflächlich absplintern wird. Das Scherrisspotential ist weiter innerhalb des Körpers, was die Oberfläche weiter destabilisiert, es ist aber sehr niedrig im Zentrum. Die Spannungsverteilung wird stark von der Bedingung kontrolliert, dass die belasteten

Oberflächen oben und unten nicht entlang der Stempel gleiten dürfen.

Wenn die Höhe des Körpers nur wenig größer gewählt wird  
5 (Abb.16, Höhe 5 Einheiten), befindet sich das Dehnungsrisss-Potential immer noch nahe an der Oberfläche, aber das Scherrissspotential ist sehr schnell ins Werkstück-Innere gewandert. Die beiden Maxima fallen nicht mehr aufeinander.

10 In einem würfelförmigen Körper (Abb.17, Höhe 10 Einheiten) fallen das Dehnungsrisss- und das Scherrisssmaximum wieder aufeinander, aber diesmal im Zentrum des Werkstücks, dahingehend interpretiert wird, dass jegliche Form des Materialnachgebens hier anfängt, sei es bruchhaft oder  
15 plastisch.

Schließlich wird ein langer, schmaler Körper betrachtet  
(Abb.18, Höhe 30 Einheiten). Das Dehnungsrissspotential bleibt  
im Zentrum des Werkstücks, aber es breitet sich entlang der  
20 langen Achse aus und nimmt nur kurz vor den belasteten Flächen ab. Das Scherrissspotential ist von der Mitte in Richtung auf die belasteten Flächen hin gewandert und bildet zwei Maxima, die gegen die Kanten hin auslaufen, an denen die belasteten und die freien Flächen aneinander stoßen und eine Grenzbedingungs-  
25 Diskontinuität existiert. Die beiden Ausläufer zu den Ecken und die belastete Fläche umschließen eine dreieckige Region, die ausserdem nur geringer Dehnung ausgesetzt sind; diese Dreiecke sind praktisch tot. Die Berechnungen erlauben die Interpretation, dass bruchhaftes Verhalten aufgrund von  
30 Dehnungsrisssen im Zentrum des Werkstücks beginnen sollte; die Risse sollten sich entlang der langen Achse des Versuchskörpers fortsetzen (was letztendlich die lokalen Grenzbedingungen innerhalb des Körpers in gewissem Grade ändert), bis der Dehnungseffekt schwindet; aber genau dort erreicht das  
35 Scherrissspotential sein Maximum, weshalb zu erwarten ist, dass

der Bruchmodus von Dehnungsriß auf Scherriss übergehen und die Risse sich gegen die Kanten des Körpers fortsetzen sollten. Das vorhergesagte Materialverhalten wird in der Tat in spröden Materialien beobachtet, z.B. in Keramik (Winter 1992).

5

### Schlussfolgerung

- 10 Es wurde gezeigt, dass das neue Verfahren zur Deformationsermittlung so moduliert werden kann, um die Spannung in einem diskreten Körper darzustellen, der einer bestimmten Belastungskonfiguration ausgesetzt ist. Im Vergleich zum Aufwand für das bisherige Verfahren sind die
- 15 Voraussetzungen an technischer Ausrüstung und mathematischem Gerüst um die hier vorgestellten Ergebnisse zu erzielen äusserst gering. Die beinhalteten Rechnungen können nämlich auf beliebigen Computern durchgeführt werden.
- 20 Der Begriff "Computer" ist in keiner Weise einschränkend zu verstehen. Es kann sich hierbei um eine beliebige zur Durchführung von Berechnungen geeignete Einheit handeln, beispielsweise eine Workstation, einen Personalcomputer, einen Mikrocomputer oder eine zur Durchführung von Berechnungen
- 25 geeignete Schaltung.

Ein wichtiger Vorteil der Erfindung ist, dass kein Punktnetz notwendig ist, aber eine Lösung kann ohne weiteres für jeden

30 beliebigen Punkt innerhalb des Gültigkeitsbereiches erlangt werden, wobei mathematische Methoden zur Anwendung kommen, für die Lösungen von Problemen aus anderen Feldtheorien seit langem existieren.

35 Insbesondere ermöglicht es die Erfindung, Verformungen ohne

Einsatz eines Netzes von Knotenpunkten, wie es beispielhaft in Fig.01 dargestellt ist, vorzunehmen.

Die Erfindung ermöglicht so eine wesentlich einfachere  
5 Ermittlung von Verformungen.

#### Literatur

- 10 Berthé, D., Choukroune, P., Jegouzo, P. (1979) Orthogneiss, mylonite and non-coaxial deformation of granites: the example of the South Armorican Shear Zone. *Journal of Structural Geology* 1, 31-41
- Boas, M.L. (1983) *Mathematical methods in the physical sciences*. J. Wiley & Sons, 2nd ed., 793pp
- 15 Bridgman, P.W. (1958) *The physics of high pressure*. Bell & Sons Ltd, London; 445pp.
- Franssen, R.C.M.W., Spiess, C.J. (1990) Deformation of polycrystalline salt in compression and in shear at 250-350°C. In: Knipe, R. (ed.) *Deformation mechanisms, rheology and tectonics*. Geological Society of London Special Paper  
20 54, 201-213
- Jeanloz, R., Knittle, E. (1986) Reduction of mantle and core properties to a standard state by adiabatic decompression. In: Saxena, S. (ed.) *Chemistry and physics of terrestrial planets*. Springer Verlag, 275-309.  
25
- Kellogg, O.D. (1929) *Foundations of potential theory*. Springer Verlag, 384pp.
- Malvern, L.E. (1969) *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, 713pp.
- 30 Merzer, A.M., Freund, R. (1975) Buckling of strike slip faults - in model and in nature. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43, 517-530



Riedel, W. (1929) *Zur Mechanik geologischer Brucherscheinungen.*  
Centralblatt für Mineralogie, Abt.B, 1929, 354-368

5 Weber, K., Juckenack, C. (1990) *The structure of the Spessart  
Mtns. crystalline basement and its position in the frame of  
the Mid-European Variscides.* In: *Mid-German Crystalline  
Rise & Rheinisches Schiefergebirge.* Field trip guide to  
IGCP 233 Conference on Paleozoic orogens in Central Europe  
- Geology and Geophysics. Göttingen-Giessen 1990, 101-114

10 Winter, W. (1992) *Experimentelle Bestimmung der Zugfestigkeit  
spröder Werkstoffe (Glas, Keramik) im Scheiben-Druck-  
Versuch.* Diss RWTH Aachen 1992.

## Patentansprüche:

1. Verfahren zur Ermittlung von Verformungen eines Körpers, wobei untersucht wird, wie die Einwirkung von Kräften den Körper verformt, dadurch gekennzeichnet, dass für einen Teil des Körpers oder seine Gesamtheit ermittelt wird, wie in Abhängigkeit von Materialeigenschaften und äusseren Grenzbedingungen ein Kräftegleichgewicht zwischen inneren und äusseren Kräften zu Stande kommt, und dass die Verformungen des Körpers so ermittelt werden, dass alle einwirkenden Kräfte im Wesentlichen folgender Formel entsprechen:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{m}_{\text{syst}} + \mathbf{m}_A + \mathbf{f}_S(\text{ext}) + \mathbf{m}_S(\text{syst}) = 0.$$

15

2. Verfahren nach Anspruch 1, dadurch gekennzeichnet, dass die Materialeigenschaften als Funktion eines Ortes  $Q$  ermittelt werden.
3. Verfahren nach einem oder beiden der Ansprüche 1 oder 2, dadurch gekennzeichnet, dass Kraftfeldeigenschaften unter Berücksichtigung von extern kontrollierten Grenzbedingungen ermittelt werden.
4. Verfahren nach einem oder mehreren der vorangegangenen Ansprüche, dadurch gekennzeichnet, dass die gesamte von einem äusseren Vektorfeld geleistete Arbeit durch Aufteilung der von Normal- und Scherkomponente eines Vektors oder Vektorfeldes geleisteten Arbeit entsprechend der Gleichung

$$\mathbf{r} * \mathbf{f} = \sqrt{|\mathbf{r} \times \mathbf{f}|^2 + |\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}|^2} = |\mathbf{r}| |\mathbf{f}| = \text{const}$$

berechnet wird.

5. Verfahren nach einem oder mehreren der vorangegangenen Ansprüche, dadurch gekennzeichnet, dass eine mechanische Wirksamkeit des Radius eines thermodynamischen Systems im Festkörper berücksichtigt wird.

6. Verfahren nach einem oder mehreren der vorangegangenen Ansprüche, dadurch gekennzeichnet, dass innerhalb eines Zeitraums, der im Vergleich zur materialabhängigen Diffusionsgeschwindigkeit kurz ist, der Radius des thermodynamischen Systems als Hebel berücksichtigt wird.

7. Verfahren nach einem oder mehreren der vorangegangenen Ansprüche, dadurch gekennzeichnet, dass die von der Scherkomponente der Kraftfelder bewirkte normale Streckung  $f_{s(ext)}$  und  $m_{s(syst)}$  im Wesentlichen entsprechend der Formel

$$\int (f_{dev} \cdot t) r d\theta = 2 \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta$$

berechnet wird.

8. Verfahren nach einem oder mehreren der vorangegangenen Ansprüche, dadurch gekennzeichnet, dass die Gesamtverschiebung nach einer logarithmischen Arbeitsgleichung, insbesondere der Gleichung

$$\int f dr = -c \int \frac{dr}{r} = -c \ln r$$

ermittelt wird.

9. Verfahren nach einem oder mehreren der vorangegangenen Ansprüche, dadurch gekennzeichnet, dass die

Gesamtverschiebung nach einer aus einer Zustandsgleichung hergeleiteten Arbeitsgleichung ermittelt wird.

10. Computer, dadurch gekennzeichnet, dass er  
5 wenigstens ein Berechnungsmittel umfasst, das ein Verfahren zur Ermittlung von Verformungen eines Körpers durchführt, wobei untersucht wird, wie eine Einwirkung von Kräften den Körper verformt, wobei in wenigstens einem  
10 Oberflächenbereich des Körpers ermittelt wird, ob ein Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Kräften besteht, dass das Berechnungsmittel Gleichgewichtsbedingungen überprüfen kann und dass das Berechnungsmittel für den Fall, dass ein derartiges Gleichgewicht besteht, Berechnungen zur Durchführung eines  
15 Verfahrens nach einem oder mehreren der Ansprüche 1 bis 9 durchführt.